

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»

Таврическая академия (структурное подразделение)

Факультет математики и информатики

Кафедра дифференциальных уравнений и геометрии

Ю. А. Хазова

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ
ЧАСТЬ 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Учебно-методическое пособие

для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 Математика

Симферополь
2019

УДК 517.925

ББК 22.161.6

Хазова Ю. А.

«Элементы теории бифуркаций. Часть 1. Динамические системы»: учебно-методическое пособие / Ю. А. Хазова – ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского». — Симферополь, 2019. — 55 с.

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом Таврической академии (структурное подразделение) от «19» 09 2019 г., протокол № 3.

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского от «15» 10 2019 г., протокол № 9.

Рецензенты:

Рудницкий О.И., доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (Структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»;

Москалева Ю.П., доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики факультета экономики, менеджмента и информационных технологий ГБОУВО РК «Крымский инженерно-педагогический университет».

Учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика. Пособие включает изучение методов и приемов решения задач по теории бифуркаций, помогает определять типы устойчивости и строить фазовые портреты различных динамических систем.

© Хазова Ю.А.

© ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», 2019

Оглавление

Введение.....	4
1. Основные понятия теории динамических систем	5
2. Одномерные динамические системы	8
3. Локальные бифуркации в одномерных динамических системах.....	16
4. Двумерные динамические системы.....	21
5. Предельные циклы	36
6. Бифуркации в двумерных динамических системах	41
Вопросы для самоконтроля.....	48
Задания для самостоятельного решения.....	53
Список литературы	54

Введение

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, позволяющего по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Проблема предсказания эволюции объекта в естествознании представляет собой, безусловно, математическую задачу. Математическая логика требует от нас четкой формулировки предмета и задачи исследования. С этой целью необходимо сформулировать определение изучаемого объекта и указать его свойства. Предметом нашего анализа будут не системы и объекты вообще, а так называемые «динамические системы» в математическом понимании этого термина.

Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Под устойчивостью понимается характер реакции системы на малое возмущение ее состояния. В пособии будут даны определения устойчивости динамической системы и на простых и понятных примерах проиллюстрированы содержание и методы решения задач об устойчивости.

Управляя параметрами динамической системы, может наблюдаться качественное изменение фазового портрета системы. Под качественным изменением портрета понимается изменение его структуры, состоящее в появлении или исчезновении предельных множеств, а также в изменении характера устойчивости траекторий, принадлежащим предельным множествам. В пособии будут разобраны основные типы бифуркаций и рассмотрены методы анализа и построения бифуркационных диаграмм.

1. Основные понятия теории динамических систем

В данном курсе в основном будут изучаться нелинейные динамические системы, так как большинство реальных процессов и систем являются по своей природе нелинейными. Будут изучаться те процессы и системы, для которых нелинейность является принципиальным свойством.

К нелинейным можно отнести следующие явления:

1. бифуркации в динамических системах – качественные изменения в системах, происходящие при изменении параметра системы;
2. хаос динамических системах – появление в нелинейных системах дифференциальных уравнений нерегулярных решений при определенных значениях параметра системы;
3. фрактальность случайных процессов и временных ядов – анализ особого класса временных ядов и случайных процессов, так называемого масштабного инварианта;
4. склонность к появлению экстремальных событий – способность возникновения экстремальных (резко выделяющихся) событий в сложных системах.

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие *состояния* как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан *закон*, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени.

Данное определение является не строгим математическим определением и приведено для понимания того, что является динамической системой. В качестве примера можно рассмотреть известную модель математического маятника. Задан подвес, на котором закреплена нить длиной L , на конце нити прикреплен шарик массой m . Далее отклоняем маятник на начальный угол φ и отпускаем. Шарик под действием сил начинает совершать колебательные движения.

Состояние математического маятника определяется двумя величинами $\{\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)\}$ – это отклонение маятника на начальный угол $\varphi(t_0)$ в начальный момент времени t_0 и начальная скорость $\dot{\varphi}(t_0)$. Законом эволюции будет уравнение, записанное для угла отклонения маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0.$$

Число степеней свободы – наименьшее число независимых координат (величин), необходимых для однозначного определения состояния системы.

Например, математический маятник имеет одну степень свободы, если описать систему при помощи одной переменной φ (обобщенная координата). С другой стороны, если ввести декартову систему координат и описать положение груза через координаты $\{x, y\}$, то математический маятник будет иметь две степени свободы (по количеству координат).

Фазовое пространство – пространство, на координатных осях которого отложены значения переменных состояния системы $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, называемых *фазовыми переменными*. Например, для одномерного фазового пространства в качестве координат используют x, \dot{x} , а двухмерное фазовое пространство задается двумя своими координатами x_1, x_2 .

Переменные x_1, x_2, \dots, x_N изменяются во времени по определенному закону эволюции, так что каждому состоянию системы соответствует *изображающая точка* с координатами (x_1, x_2, \dots, x_N) . Так в двумерном случае (на плоскости) изображающую точку можно задать так $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2})$.

Совокупность изображающих точек называется *фазовой траекторией*. Пусть в начальный момент времени t_0 динамическая система характеризуется точкой $x(t_0) = x_0$. Далее увеличиваем время, то есть состояние системы изменяется, и получаем точку $x = x(t)$. Таким образом, множество изображающих точек формирует фазовую траекторию. Или говорят, что изображающая точка движется по фазовой траектории из точки x_0 в точку x , оставляя след в виде фазовой траектории.

Совокупность фазовых траекторий при различных начальных положениях системы называется *фазовым портретом системы*.

Одним из свойств динамической системы является то, что фазовые траектории в фазовом портрете не пересекаются. Это следует из теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений. Фазовый портрет динамической системы полностью описывает картину ее поведения.

Динамическая система является определенной, если:

1) задано фазовое пространство X , образующее полное метрическое пространство;

- 2) задано множество моментов времени T ;
- 3) задан оператор эволюции E_t – некоторое отображение: $X \rightarrow X$, который каждому состоянию $x_0 \in X$ в начальный момент времени $t_0 \in T$ однозначно ставит в соответствие некоторое состояние $x(t) \in X$ в любой другой момент времени $t \in T$, то есть $x(t) = E_t x(t_0)$.

Классификация динамических систем.

- динамическая система с непрерывным временем (континуальные системы) $\dot{x} = F(x)$, где $F(x)$ – вектор-функция;
- динамическая система с дискретным временем (N -мерные отображения) $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ – одномерное отображение. Одномерное отображение позволяет по числу x_n определить следующее число x_{n+1} , и таким образом определяется вся последовательность $\{x_n\}$;
- по виду оператора эволюции E_t , которые делятся на линейные системы $E_t(x + x') = E_t(x) + E_t(x')$, $E_t(\alpha x) = \alpha E_t(x)$, $x, x' \in X$ и нелинейные системы, для которых не выполняются приведенные выше условия $E_t(x + x') \neq E_t(x) + E_t(x')$;
- автономные системы (не зависят явно от времени) $\dot{x} = F(x)$;
- неавтономные системы (явно зависят от времени) $\dot{x} = F(x, t)$;
- точечные системы, фазовой переменной которой является функция от времени $x(t) \in X$. Модели континуальных точечных систем – это обыкновенные дифференциальные уравнения;
- распределенные системы, фазовой переменной которой является не только функция от времени, но и от обобщенной координаты $u(x, t) \in X$. Модели систем – это дифференциальные уравнения с частными производными;
- детерминированные динамические системы, это по сути все ранее рассмотренные системы;

- случайные динамические системы $\dot{x} = F(x) + \varepsilon_t$, где ε_t – шум определенного вида. Модели таких систем – это стохастические дифференциальные уравнения.

Определение устойчивости решений (интегральных траекторий).

Пусть некоторый процесс описывается автономной динамической системой $\dot{x} = F(x)$ с начальным условием x_0 . Необходимо ответить на вопрос: на сколько чувствительны решения $\varphi(t)$ динамической системы при больших временах ($t \rightarrow \infty$) к малым изменениям начальных условий?

Решение динамической системы *устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $\|x_0 - \varphi_0\| < \delta$, то $\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$.

Если решение динамической системы устойчиво не только по Ляпунову, но и удовлетворяет соотношению $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$ при условии $\|x_0 - \varphi_0\| < \delta$, то решение является *асимптотически устойчивым*.

Естественно, если решение асимптотически устойчиво, то оно и устойчиво по Ляпунову, а вот обратное не верно.

Если решение динамической системы устойчиво не только по Ляпунову, но и из условия $\|x_0 - \varphi_0\| < \delta$ следует, что $\|x(t) - \varphi(t)\| < \alpha \|x_0 - \varphi_0\| e^{-\beta t}$ для всех $t \geq 0$, то решение является *экспоненциально устойчивым*.

2. Одномерные динамические системы

Одномерные динамические системы так же называются динамическими системами на прямой или динамическими системами с одной степенью свободы.

Рассмотрим автономную динамическую систему первого порядка

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь обозначение $x = x(t)$ показывает зависимость функции x от переменной t .

Три подхода к анализу динамических систем.

а) аналитическое решение задачи Коши.

Сформулируем задачу Коши. Известен закон эволюции $\dot{x} = f(x)$, начальное состояние x_0 и требуется найти решение $\varphi(t)$ (интеграл) соответствующей динамической системы, то есть $x_0 \rightarrow \varphi$. Ограничение подхода: не всегда удается получить аналитическое решение, особенно у нелинейных систем.

б) численное решение задачи Коши.

В данном подходе та же задача Коши решается с привлечением численных методов, например метод Эйлера, Рунге-Кутта и т.д. Ограничение: не всегда удается получить фазовый портрет.

с) качественный анализ (метод фазовых траекторий).

Данный подход дает возможность по заданному закону эволюции динамической системы получить фазовый портрет и, таким образом, однозначно определить поведение всей заданной системы, то есть

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow \text{фазовый портрет}$$

Достоинство: получается глобальная картина поведения фазовых траекторий; применим как к линейным, так и нелинейным системам. Ограничение: для систем со степенями свободы выше третьей затруднительно наглядно представить фазовый портрет.

Качественная теория динамических систем решает два типа задач: 1) исследовать поведение системы при фиксированных значениях параметра и затем построить фазовый портрет системы; 2) исследовать качественные изменения в системе при изменении значений параметра и найти бифуркации (новообразования) в системе.

Сформулируем постановку задачи. Пусть задана динамическая система

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad (2)$$

где $x \in R^n$ – вектор динамических переменных, $\alpha \in R^n$ – вектор параметров системы. Необходимо найти компоненты вектора α при которых равновесие системы является устойчивым и происходят локальные бифуркации в системе.

Алгоритм качественного анализа одномерных динамических систем.

В задаче (2) зафиксируем значение параметра α и получим задачу (1).

Шаг 1. Решаем уравнения $f(x) = 0$, определяем *стационарные точки* (фиксированные, равновесные, точки покоя) x^* системы.

Шаг 2. Изображаем фазовую траекторию $\dot{x} = f(x)$, на плоскости $x\dot{x}$. Особенность фазовой траектории в том, что она пересекает ось Ox в стационарных точках (см. рис. 1).

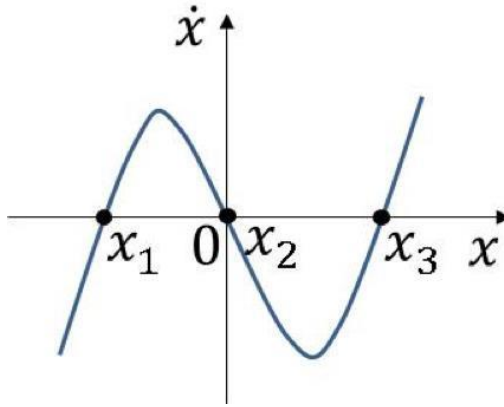


Рис. 1. Фазовая траектория системы с тремя стационарными точками.

Шаг 3. Классифицируем стационарные точки, то есть определяем какие из них устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы.

Если в некоторой окрестности стационарной точки x^* фазовая траектория убывает, то x^* является асимптотически устойчивой точкой (или *аттрактором*).

Если в некоторой окрестности стационарной точки x^* фазовая траектория возрастает, то x^* является неустойчивой точкой (или *репеллером*).

Опираясь на фазовую траекторию динамической системы, построим интегральные кривые (решения) системы (см. рис. 2).

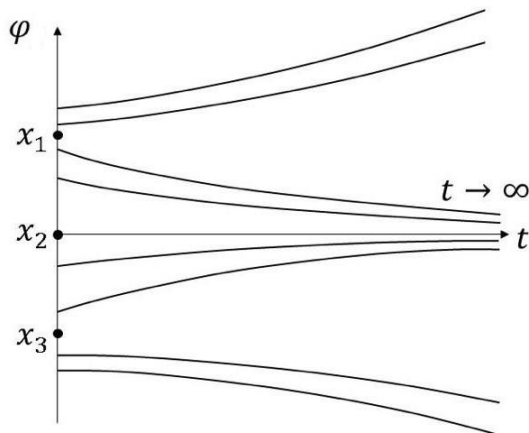


Рис. 2. Поведение интегральных кривых динамической системы.

Задача 1. Дана одномерная динамическая система $\dot{x} = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Найти стационарные точки и определить их устойчивость.

Решение. По определению стационарности точки $\dot{x} = 0$, значит стационарные точки динамической системы являются корнями алгебраического уравнения

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Имеем три стационарные точки: $x_1^* = -1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 2$.

Фазовая траектория $\dot{x} = f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на плоскости $xO\dot{x}$ представлена на рис. 3.

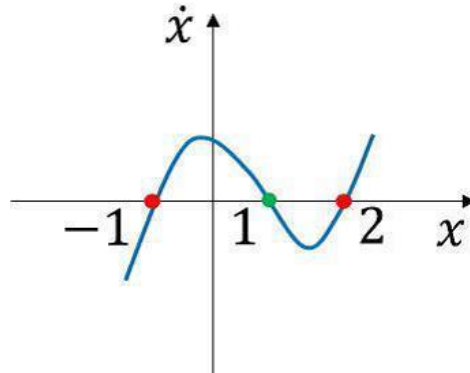


Рис. 3. Фазовая траектория одномерной динамической системы.

Поведение фазовой траектории в окрестности стационарных точек (убывание, возрастание) определяет их устойчивость. Получаем, что $x_2^* = 1$ – аттрактор (асимптотически устойчивая точка), $x_1^* = -1$, $x_3^* = 2$ – репеллеры (неустойчивые точки).

Полученные результаты дают возможность определить асимптотическое поведение (при $t \rightarrow \infty$) интегральных кривых (решения дифференциального уравнения $\dot{x} = x^3 - 2x^2 - x + 2$) при любых начальных условиях (рис. 4).

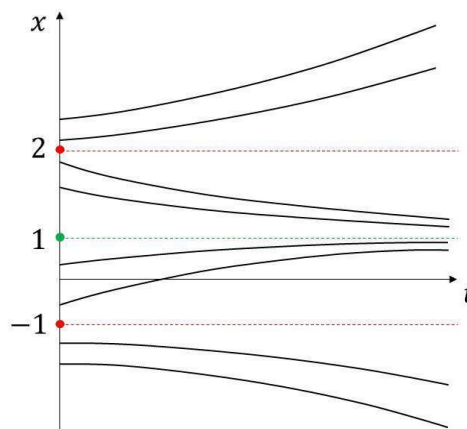


Рис. 4. Интегральные кривые при различных начальных условиях.

Задача 2. При каких значениях параметра α , нулевая стационарная точка динамической системы $\dot{x} = \alpha x^2 - x$ является асимптотически устойчивой?

Решение. Стационарные точки динамической системы являются корнями алгебраического уравнения

$$\alpha x^2 - x = 0,$$

$$\alpha x \left(x - \frac{1}{\alpha} \right) = 0.$$

Динамическая система имеет нулевую $x_1^* = 0$ и ненулевую $x_2^* = \frac{1}{\alpha}$ стационарные точки. По условию задачи нас интересует параметрическое условие устойчивости нулевой равновесной точки.

При любых, отличных от нуля, значениях параметра α фазовая траектория динамической системы – парабола. На рис. 5 изображены фазовые траектории при отрицательных и положительных значениях α .

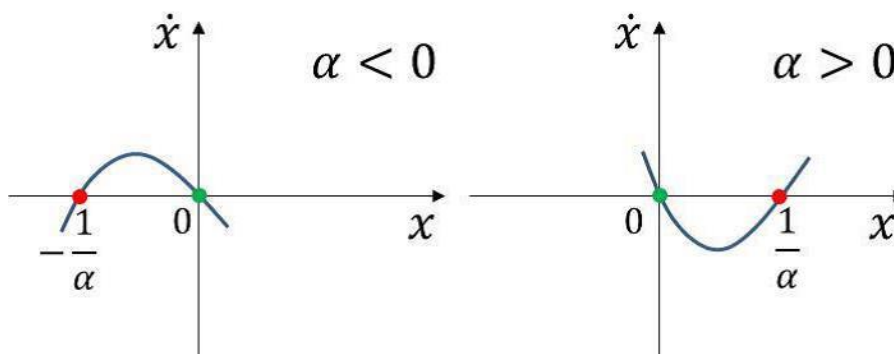


Рис. 5. Фазовые траектории при различных значениях параметра.

Следовательно, при любых, отличных от нуля, значениях параметра α нулевая стационарная точка является асимптотически устойчивой.

Две простейшие модели экономической динамики.

Рассмотрим две прикладные задачи и применим алгоритм качественного анализа для исследования системы.

Модель Мальтуса. В своей работе Томас Мальтус показал, что с увеличением роста населения (популяции) истощаются природные ресурсы. Адаптируем модель Мальтуса к росту производства продукции без ограничения на потребление ресурсов:

$$\dot{x} = \alpha x,$$

где $x(t) \geq 0$ – количество продукции, $\alpha > 0$ – темп роста продукции.

Проведем качественный анализ представленной модели. Из уравнения $\alpha x = 0$ находим единственную стационарную точку $x^* = 0$. Строим фазовую траекторию $f(x) = \alpha x$, которая является прямой. Поскольку функция $f(x)$ возрастающая, то $x^* = 0$ – репеллер. Далее строим интегральные кривые уравнения – это возрастающие функции, на бесконечности принимающие бесконечное значение.

Выводы: неограниченное потребление ресурсов приводит к неограниченному производству продукции, неограниченное производство приводит к истощению ресурсов.

Модель Ферхюльста. В свое время Пьер Ферхюльст обобщил уравнение Мальтуса и учел фактор ограниченности ресурсов

$$\dot{x} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right),$$

где $x(t) \geq 0$ – количество продукции, $\alpha > 0$ – темп роста продукции, $K > 0$ – максимальное количество продукции, определяемое доступным ресурсом.

Качественный анализ задачи дает такие результаты. Определяем стационарные точки

$$\alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) = 0.$$

Стационарными точками будут $x_1^* = 0$ и $x_2^* = K$. Рисуем фазовую траекторию, которая является перевернутой параболой. Таким образом, $x_1^* = 0$ – репеллер, а $x_2^* = K$ – аттрактор. Далее рисуем интегральные кривые.

Выводы: ограниченное потребление ресурсов приводит к ограниченному производству продукции, ограниченное производство не приводит к истощению ресурсов.

Теорема Ляпунова об устойчивости в первом приближении.

Теорема. Пусть $\dot{x} = f(x)$ – нелинейная динамическая система

(оригинальная система), $\dot{x} = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*)$ – линейная аппроксимация оригинальной системы в окрестности стационарной точки x^* (то есть разложение функции в ряд Тейлора). Если x^* является аттрактором (репеллером) линейной аппроксимации, то x^* является аттрактором (репеллером) оригинальной системы. В случае устойчивости особой точки по Ляпунову вывод об устойчивости оригинальной системы сделать невозможно.

Использование теоремы Ляпунова позволяет упростить решение задачи с сохранением асимптотической устойчивости (неустойчивости) стационарных точек.

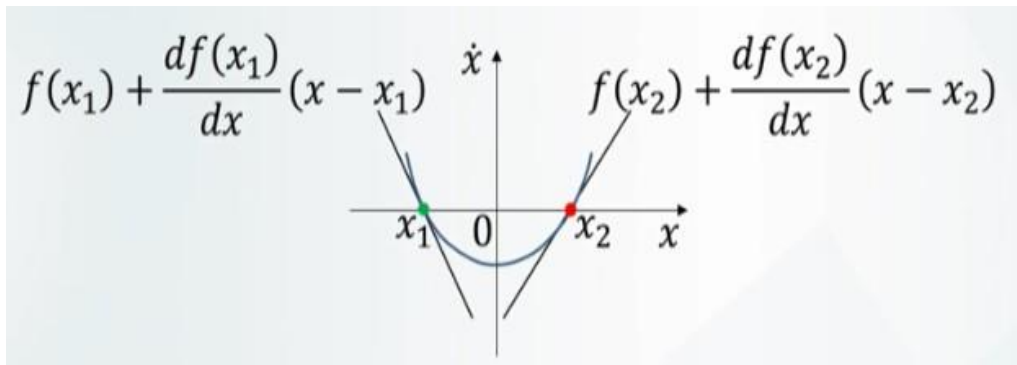


Рис. 6. Геометрическая интерпретация теоремы Ляпунова.

Задача 3. Используя теорему Ляпунова об устойчивости в первом приближении, определить устойчивость стационарных точек динамической системы $\dot{x} = \exp(x^2) - \exp(2)$.

Решение. Стационарные точки динамической системы являются корнями алгебраического уравнения

$$\exp(x^2) - \exp(2) = 0,$$

$$x^2 = 2 \cdot \ln e = 2.$$

Динамическая система имеет две стационарные точки: $x_1^* = -\sqrt{2}$, $x_2^* = \sqrt{2}$.

Линейная аппроксимация правой части динамической системы $\dot{x} = f(x)$ в окрестности стационарной точки x^* имеет вид

$$f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*).$$

Причем, по определению стационарных точек, $f(x^*) = 0$.

Для динамической системы $\dot{x} = \exp(x^2) - \exp(2)$ линейная аппроксимация имеет вид

$$2x^* \exp\left[(x^*)^2\right](x - x^*).$$

Рассмотрим особенности последнего выражения в стационарных точках $x_1^* = -\sqrt{2}$, $x_2^* = \sqrt{2}$.

Стационарная точка $x_1^* = -\sqrt{2}$

$$2(-\sqrt{2}) \exp\left[(-\sqrt{2})^2\right](x + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}e^2 x - 4e^2.$$

Фазовая траектория $\dot{x} = -2\sqrt{2}e^2 x - 4e^2$ является прямой с отрицательным тангенсом угла наклона (убывающая зависимость). Следовательно, стационарная точка $x_1^* = -\sqrt{2}$ – аттрактор.

Стационарная точка $x_2^* = \sqrt{2}$

$$2\sqrt{2} \exp\left[(\sqrt{2})^2\right](x - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}e^2 x + 4e^2.$$

Фазовая траектория $\dot{x} = 2\sqrt{2}e^2 x + 4e^2$ является прямой с положительным тангенсом угла наклона (возрастающая зависимость). Следовательно, стационарная точка $x_2^* = \sqrt{2}$ – репеллер.

Приложение теоремы Ляпунова к анализу модели Солоу.

Рассмотрим модель экономической динамики или модель долгосрочного экономического роста (модель Солоу)

$$\dot{k} = sak^\alpha - (n + \delta)k,$$

где функция $k = k(t) \geq 0$ – капиталовооруженность труда с постоянной эффективностью, $a > 0$ – технологический коэффициент, $s > 0$ – норма сбережения, $0 < \alpha < 1$ – коэффициент эластичности по труду, $n > 0$ – темп роста населения, $\delta > 0$ – темп износа капитала.

Проведем анализ уравнения Р. Солоу в первом приближении. Стационарными точками, как решение

$$sak^\alpha - (n + \delta)k = 0,$$

являются $k_1^* = 0$, $k_2^* = \left(\frac{sa}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Разложим далее правую часть уравнения в ряд Тейлора и получим линеаризованную функцию

$$f(k) = \left[saa(k^*)^{\alpha-1} - (n + \delta) \right] (k - k^*).$$

Подставим в линеаризованную функцию найденные стационарные точки и получим значение функции $f(k)$ в стационарных точках

$$\lim_{k_1^* \rightarrow 0} f(k_1^*) = \infty, \quad f(k_2^*) = -(n + \delta)(1 - \alpha)(k - k_2^*).$$

Поскольку $f(k_2^*)$ убывающая функция, то аттрактором системы является

$$k_2^* = \left(\frac{sa}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

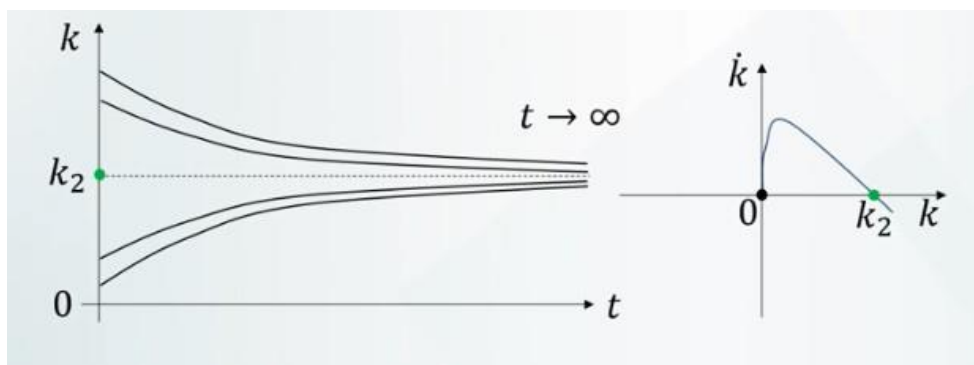


Рис. 7. Интегральные кривые и фазовая траектория уравнения Р.Солоу.

Вывод: в долгосрочной перспективе вне зависимости от начальных условий капиталовооруженность стремится к своему стационарному значению.

3. Локальные бифуркации в одномерных динамических системах

Используя качественную теорию, исследование динамической системы проводилось при фиксированных значениях параметров. Для более подробного анализа систем и выявления зависимости решений от изменения параметров воспользуемся теорией бифуркаций (теорией ветвлений).

Задача об изгибе колонны

Представим себе зафиксированную вертикально колонну (идеальную балку) и проведем через середину колонны ось. Приложим сверху к колонне некоторую силу P (величина нагрузки) и посмотрим, что с колонной будет происходить. Далее будем увеличивать силу, то есть изменять величину нагрузки. Дойдя до некоторого значения P_c , колонна начнет изгибаться, то есть ось колонны сместится на некоторое значение A . Если мы и дальше будем увеличивать нагрузку, то возможны три варианта: колонна деформируется и ее ось смещается влево, колонна деформируется и ее ось смещается вправо или ось не смещается, но балка деформируется вплоть до разрушения. Таким образом, можно сделать вывод, что при $P = P_c$ изменяется число состояний равновесия и их устойчивость.

Данный пример иллюстрирует применение теории бифуркаций для исследования динамических систем, то есть изменение состояния системы в зависимости от значений параметра.

Для успешного применения теории бифуркаций приведем основные ее понятия.

Бифуркация – качественная перестройка фазового портрета динамической системы при малых изменениях ее параметров (*бифуркационных параметров*).

Значения параметров, при которых происходят бифуркации, называются *бифуркационными значениями* или *точками бифуркации* системы.

Бифуркационная диаграмма – изображение смены всех возможных динамических режимов системы при изменении значения бифуркационного параметра. На диаграмме устойчивые режимы принято изображать сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Так, в задаче об изгибе колонны P – бифуркационный параметр, P_c – точка бифуркации.

В теории бифуркаций чаще всего рассматриваются *негрубые* динамические системы, то есть такие системы, в которых при малом изменении параметров динамической системы $\dot{x} = f(x, \alpha)$ вид фазового портрета качественно перестраивается.

Бифуркации равновесий

Можно выделить два класса бифуркаций: локальные (бифуркации равновесий) и глобальные. Начнем изучение бифуркаций с локальных равновесий.

Бифуркации равновесий – это бифуркации динамических систем, в которых меняется число равновесных точек и/или меняется их устойчивость.

Седло-узловая бифуркация. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = \alpha - x^2, \quad (3)$$

где $x = x(t)$, α – бифуркационный параметр. Найдем стационарные точки: $x^* = \pm\sqrt{\alpha}$ при $\alpha > 0$, $x^* = 0$ при $\alpha = 0$ и не существуют при $\alpha < 0$. Далее рассмотрим фазовую траекторию и бифуркационную диаграмму (см. рис. 8). Таким образом, точка $x^* = 0$ – точка бифуркации.

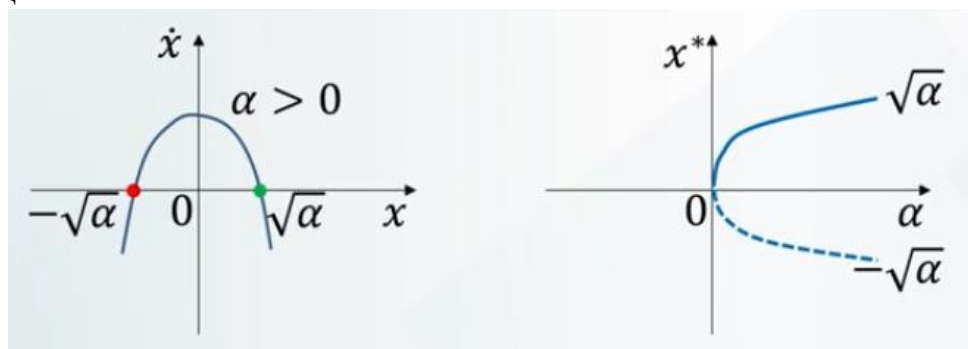


Рис. 8. Фазовая траектория и бифуркационная диаграмма системы (3) при значениях $\alpha > 0$.

Упражнение. Самостоятельно рассмотрите динамическую систему $\dot{x} = \alpha + x^2$ и постройте соответствующие ей фазовую траекторию и бифуркационную диаграмму.

Седло-узловая бифуркация в системе «производители-потребители»

Рассмотрим обобщенную модель «производители-потребители»

$$\dot{x} = b(x)x - d(x)x,$$

где $x(t) \geq 0$ – количество продукции, $b(x)$ – удельная скорость производства продукции, $d(x)$ – удельная скорость потребления продукции. В рамках обобщенной модели рассмотрим конкретную задачу о потреблении энергии, основанную на модели Ферхюльста

$$\dot{x} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - d,$$

где $x(t) \geq 0$ – количество электроэнергии, α , K – фиксированные параметры, K – максимальное количество производимой энергии, d – количество электроэнергии, потребляемой в единицу времени.

Упростим постановку задачи, перейдя к новым переменным.

Пусть $x(t) \equiv K y(t)$, $t \equiv \frac{1}{\alpha} \tau$, $\beta \equiv \frac{d}{\alpha K}$, тогда получаем однопараметрическую систему

$$\dot{y} = y(1-y) - \beta.$$

Стационарными точками этой системы являются:

$y^* = 1 \pm \sqrt{1-4\beta}$ при $\beta < \frac{1}{4}$, $y^* = 1$ при $\beta = \frac{1}{4}$ и не существуют при

$\beta > \frac{1}{4}$. Далее построим фазовую траекторию, бифуркационную диаграмму и интегральные траектории системы (см. рис. 8 и рис. 9).

Точкой бифуркации является значение $\beta = \frac{d}{\alpha K} = \frac{1}{4}$.

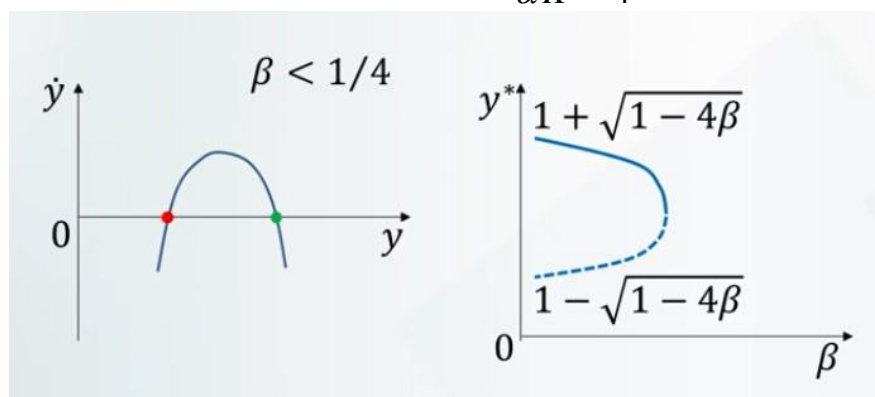


Рис. 9. Фазовая траектория и бифуркационная диаграмма при $\beta < \frac{1}{4}$.

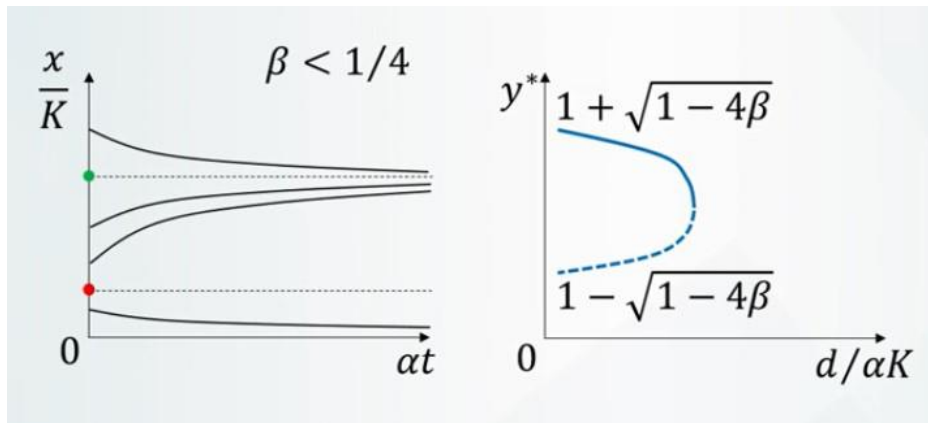


Рис. 10. Интегральные кривые и бифуркационная диаграмма при $\beta < \frac{1}{4}$.

Транскритическая бифуркация (бифуркация обмена устойчивостью)

Будем рассматривать динамическую систему

$$\dot{x} = \alpha x - x^2, \quad (4)$$

где $x = x(t)$, α – бифуркационный параметр. Находим стационарные точки: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = \alpha$ при $\alpha > 0$, $x^* = 0$ при $\alpha = 0$, $x_1^* = 0$ и $x_2^* = -\alpha$ при $\alpha < 0$.

Далее рассмотрим фазовую траекторию и бифуркационную диаграмму (см. рис. 11 и рис. 12). Точка $x^* = 0$ – точка бифуркации.

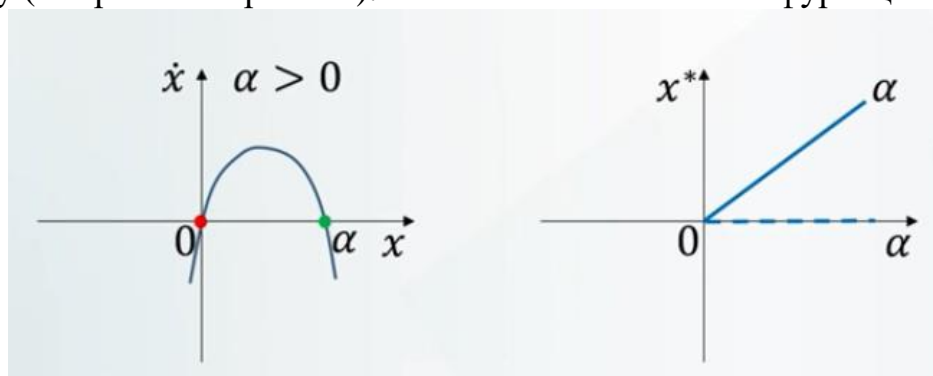


Рис. 11. Фазовая траектория и бифуркационная диаграмма системы (4) при значениях $\alpha > 0$.

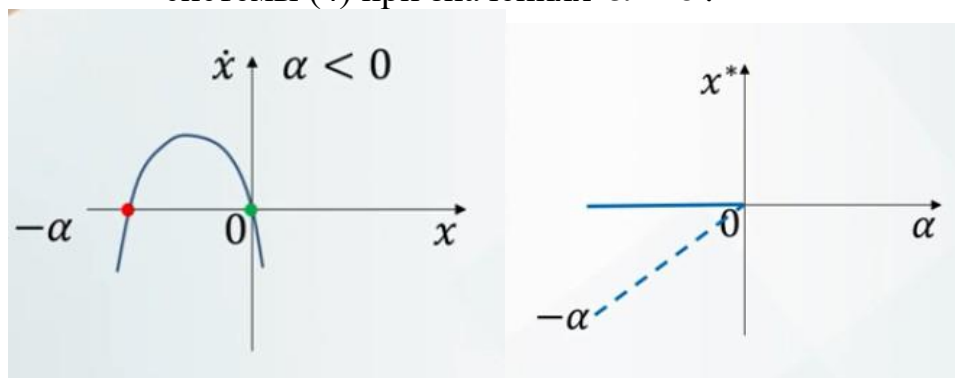


Рис. 12. Фазовая траектория и бифуркационная диаграмма системы (4) при значениях $\alpha < 0$.

Упражнение. Самостоятельно рассмотрите динамическую систему $\dot{x} = \alpha x + x^2$ и постройте соответствующие ей фазовую траекторию и бифуркационную диаграмму.

Транскритическая бифуркация и чрезмерный вылов рыбы

В рамках модели Ферхюльста рассмотрим конкретную задачу о вылове рыбы

$$\dot{x} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - d \cdot x, \quad (5)$$

где $x(t) \geq 0$ – численность популяции, α, K – фиксированные параметры, d – доля популяции, изымаемая в единицу времени, $d \cdot x$ – изъятие из популяции некоторого числа особей, пропорционального численности популяции.

Снова упростим постановку задачи, перейдя к новым переменным.

Пусть $x(t) \equiv K y(t)$, $t \equiv \frac{1}{\alpha} \tau$, $\beta \equiv \frac{d}{\alpha}$, тогда получаем

однопараметрическую систему $\dot{y} = y(1 - y) - \beta y$.

Стационарные точки: $y_1^* = 0$ и $y_2^* = 1 - \beta > 0$ при $\beta < 1$, $y^* = 0$ при $\beta = 1$, $y_1^* = 0$ и $y_2^* = 1 - \beta < 0$ при $\beta > 1$. Далее строим фазовые траектории, бифуркационную диаграмму и интегральные траектории системы (5) (см. рис. 13 и рис. 14).

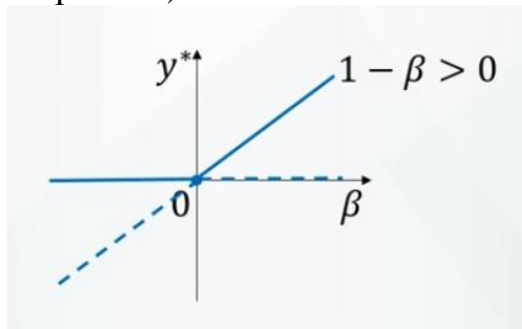


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма системы (5).

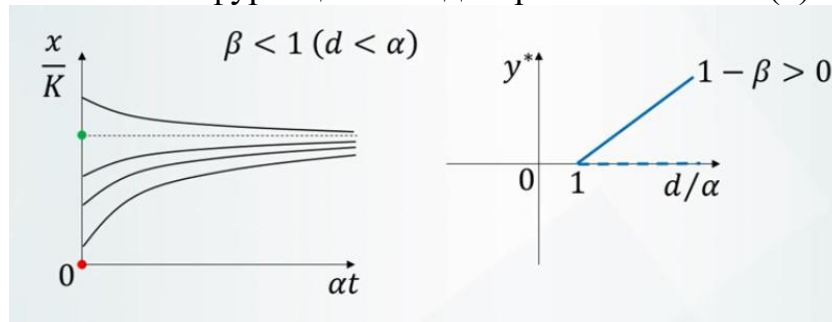


Рис. 14. Интегральные траектории и бифуркационная диаграмма системы (5) при $\beta < 1$.

Вилообразная бифуркация (бифуркация «вилки»)

Задана динамическая система соответствующая случаю сверхкритической (надкритической) бифуркации «вилки»

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad (6)$$

где $x = x(t)$, α – бифуркационный параметр. Находим стационарные точки: $x_1^* = 0$ и $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\alpha}$ при $\alpha > 0$, $x^* = 0$ при $\alpha = 0$ и $x^* = 0$ при $\alpha < 0$. Точка $x^* = 0$ – точка бифуркации.

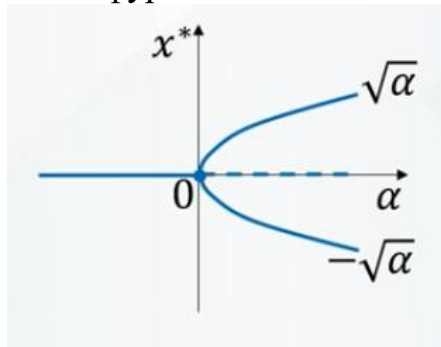


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма системы при различных значениях α .

Упражнение. Самостоятельно рассмотрите докритическую (подкритическую) вилообразную бифуркацию системы $\dot{x} = \alpha x + x^3$ и постройте соответствующую бифуркационную диаграмму.

Вернемся к задаче об изгибе колонны. Если провести бифуркационный анализ и построить соответствующую диаграмму, получим случай вилообразной бифуркации.

4. Двумерные динамические системы

Двумерные динамические системы также называют динамическими системами на плоскости или динамическими системами с двумя степенями свободы.

Под динамической системой на плоскости будем понимать автономную динамическую систему первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (7)$$

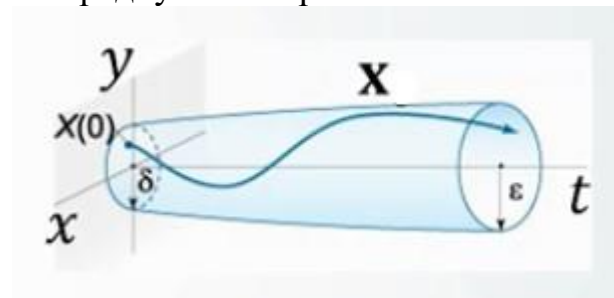
с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Траекториями системы (интегральными кривыми) будут $x(t) = \varphi(x_0, t)$, $y(t) = \omega(y_0, t)$, то есть решения задачи (7). Интегральные кривые динамической системы не пересекаются.

Каждому состоянию системы соответствует *изображающая точка* $M(x, y)$ на *фазовой плоскости* xOy . Любая изображающая точка соответствует состоянию системы. Множество изображающих точек на

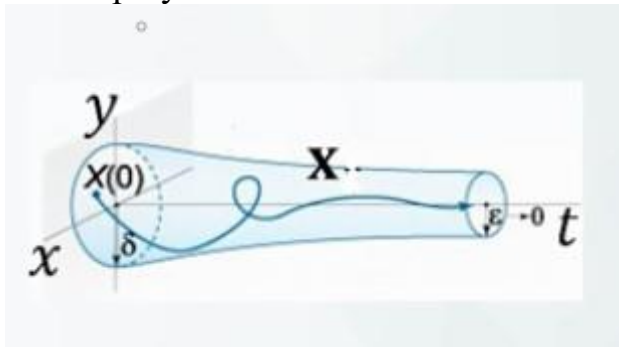
плоскости xOy называется *фазовой траекторией* системы: $y = \mu(x, x_0, y_0)$. Обычно на фазовой траектории стрелочкой указывают направление движения изображающей точки из начального состояния, то есть показывают направление эволюции (динамику) системы.

Множество фазовых траекторий при различных x_0 называется *фазовым портретом* системы: $\{\mu(x, x_{0i}, y_{0i})\}$, $i = 1, \dots, n, \dots$. Роль фазового портрета заключается в том, что он однозначно определяет эволюцию (поведение) динамической системы.

Неформальное определение устойчивости по Ляпунову: динамическая система *устойчива по Ляпунову*, если любая траектория x , которая начинается в $\delta(\varepsilon)$ -окрестности точки $x(0)$ остается внутри трубки с максимальным радиусом ε при всех $t \geq 0$.



Динамическая система *асимптотически устойчива*, если все траектории, достаточно близкие к $x(0)$ в начальный момент времени, постепенно сходятся к x при увеличении t .



Признаки устойчивости двумерных автономных систем

Начнем изучение с линейных динамических систем, поскольку они являются прекрасной базой для изучения нелинейных динамических систем. Пусть задана линейная автономная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Эти коэффициенты образуют квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Основной особенностью линейной автономной системы является то, что она имеет единственную нулевую стационарную точку $(0, 0)$, устойчивость которой определяется следующими теоремами.

Теорема 1. Система *устойчива по Ляпунову* (устойчива в смысле Ляпунова) тогда и только тогда, когда собственные значения λ_i матрицы A удовлетворяют соотношению $\operatorname{Re}[\lambda_i] \leq 0$, причем у собственных значений, действительная часть которых равна нулю, алгебраическая и геометрическая кратности должны быть одинаковы.

Теорема 2. Система *асимптотически устойчива* тогда и только тогда, когда все собственные значения λ_i матрицы A удовлетворяют соотношению $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$.

Теорема 3. Система *неустойчива*, если выполняется хотя бы одно из условий: матрица A имеет собственное значение λ_k с положительной действительной частью; матрица A имеет собственное значение λ_k с нулевой действительной частью, причем геометрическая кратность λ_k меньше его алгебраической кратности.

Эти теоремы позволяют исследовать устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами, зная собственные значения и собственные векторы матрицы.

Задача 4. Является ли динамическая система $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ асимптотически устойчивой?

Решение. Динамическая система имеет единственную стационарную точку $O(0, 0)$ в начале координат.

Матрица динамической системы: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение (уравнения для нахождения собственных значений матрицы A) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(A - \lambda E) &= \operatorname{Det} \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \\ &(-1 - \lambda)^2 + 1 = 0, \\ &\lambda_1 = -1 - i, \quad \lambda_2 = -1 + i. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношению $\operatorname{Re}[\lambda_1] = -1 < 0$, $\operatorname{Re}[\lambda_2] = -1 < 0$. Следовательно, динамическая система является асимптотически устойчивой.

Задача 5. При каких значениях параметра α динамическая система $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y \\ \dot{y} = x + \alpha y \end{cases}$ является асимптотически устойчивой?

Решение. Матрица динамической системы $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение (уравнения для нахождения собственных значений матрицы A)

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(A - \lambda E) &= \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = 0, \\ &(\alpha - \lambda)^2 - 1 = 0, \\ &\lambda_1 = \alpha - 1, \quad \lambda_2 = \alpha + 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные λ_i матрицы A удовлетворяют соотношению $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$, значения параметра α являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} \alpha - 1 < 0, \\ \alpha + 1 < 0. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является $\alpha \in (-\infty, -1)$. Следовательно, динамическая система является асимптотически устойчивой при $\alpha < -1$.

Устойчивость нелинейных двумерных автономных систем

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

где f, g – нелинейные функции. Пусть система имеет нулевую равновесную точку $(0, 0)$. Вообще говоря, нелинейные системы могут иметь и стационарные точки, отличные от нуля. Раскладываем правые части уравнений системы в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки $(0, 0)$, оставляя только линейную часть

$$\begin{cases} \dot{x} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{df}{dy} \right|_{(0,0)} y, \\ \dot{y} = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{dg}{dy} \right|_{(0,0)} y. \end{cases}$$

Таким образом, исходную динамическую систему можно представить в матрично-векторной форме

$$\dot{X} = J \cdot X,$$

здесь $X = (x, y)$ – вектор динамических переменных системы, матрица

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ – матрица Якоби (якобиан системы).}$$

Признаки устойчивости нелинейной системы:

- Если все собственные значения якобиана J имеют отрицательные действительные части, то нулевые стационарные точки $(0, 0)$ исходной (нелинейной) системы и линеаризованной являются асимптотически устойчивыми;

- Если хотя бы одно собственное значение якобиана имеет положительную действительную часть, то нулевые стационарные точки $(0, 0)$ исходной (нелинейной) системы и линеаризованной являются неустойчивыми.

Замечание 1: в критических случаях, когда собственные числа имеют действительную часть, равную нулю, следует использовать другие методы исследования устойчивости.

Замечание 2: если стационарная точка характеризуется собственными значениями с ненулевой действительной частью, то такая точка называется *грубой*.

Задача 6. Дана нелинейная динамическая система
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy \\ \dot{y} = -2y + xy \end{cases}.$$

Найти стационарные точки и определить их устойчивость.

Решение. Стационарные точки являются решением алгебраической системы уравнений
$$\begin{cases} -x + xy = 0 \\ -2y + xy = 0 \end{cases}.$$
 Динамическая система имеет две стационарные точки
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

В первом приближении определим тип устойчивости стационарных точек. Якобиан динамической системы

$$J = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ y & -2+x \end{pmatrix}.$$

Определим тип устойчивости стационарной точки $(0,0)$. В этом случае якобиан $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Уравнение для нахождения собственных значений якобиана

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - \lambda E) &= \text{Det} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Det} \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0, \\ (1+\lambda)(2+\lambda) &= 0, \\ \lambda_1 &= -2, \quad \lambda_2 = -1. \end{aligned}$$

Собственные значения действительные и отрицательные. Следовательно, нулевая стационарная точка является асимптотически устойчивой.

Определим тип устойчивости стационарной точки $(2,1)$. В этом случае якобиан $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Уравнение для нахождения собственных значений якобиана

$$\begin{aligned} \text{Det}(A - \lambda E) &= \text{Det} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Det} \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0, \\ \lambda^2 - 2 &= 0, \\ \lambda_1 &= -\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Собственные значения действительные и разных знаков. Следовательно, ненулевая стационарная точка является неустойчивой.

Фазовые портреты двумерных автономных систем

Первым шагом для определения класса стационарной точки является нахождение собственных значений и собственных векторов якобиана нелинейной системы. То есть решение задачи вида

$$J \cdot X = \lambda \cdot X.$$

Для определения собственных значений $\lambda_{1,2}$ системы решаем характеристическое уравнение

$$\text{Det}(J - \lambda E) = 0,$$

где E – единичная матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Det – определитель. Формула для собственных значений для системы на плоскости

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr J}{2} \pm \sqrt{\frac{(Tr J)^2}{4} - Det J},$$

здесь Tr – след якобиана. Если $\lambda = \text{Re}[\lambda] + \text{Im}[\lambda]i$ – комплексное число, то $\text{Re}[\lambda] = \frac{Tr J}{2}$, $\text{Im}[\lambda] = \sqrt{\frac{(Tr J)^2}{4} - Det J}$. Далее рассмотрим возможные варианты собственных значений.

Грубые стационарные точки ($\text{Re}[\lambda_{1,2}] \neq 0$).

Узел. Собственные значения якобиана – это действительные числа $\lambda_{1,2} \in R$ одного знака. Узел может быть как асимптотически устойчивым (если $\lambda_{1,2} < 0$), так и неустойчивым (если $\lambda_{1,2} > 0$).

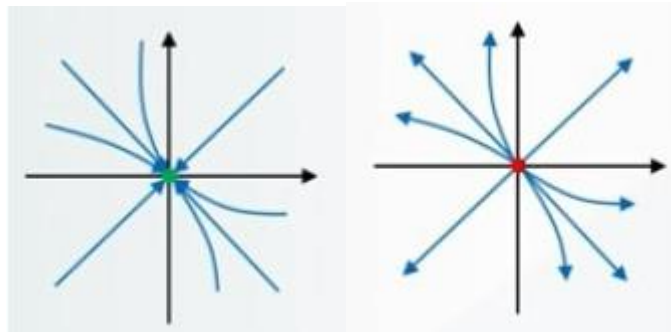


Рис. 18. Фазовые портреты устойчивого и неустойчивого узла.

Фокус. Собственные значения якобиана – это комплексные числа $\lambda_{1,2} \in C$. Фокус может быть как асимптотически устойчивым (если $\text{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$), так и неустойчивым (если $\text{Re}[\lambda_{1,2}] > 0$).

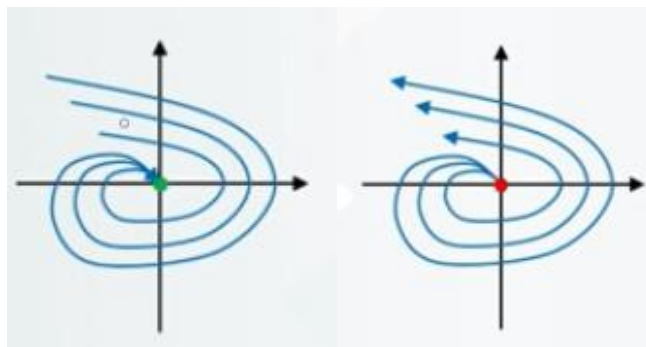


Рис. 19. Фазовые портреты устойчивого и неустойчивого фокуса.

Седло. Собственные значения якобиана – это действительные числа $\lambda_{1,2} \in R$ разных знаков, т.е. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Седло всегда неустойчиво.

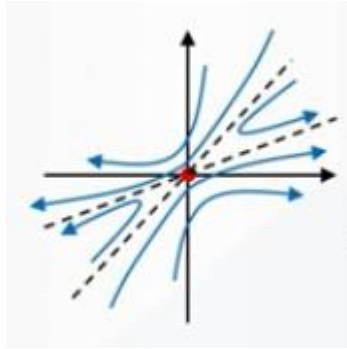


Рис. 20. Фазовый портрет седла.

Негрубые стационарные точки ($\text{Re}[\lambda_{1,2}] = 0$).

Центр. Собственные значения якобиана – это чисто мнимые комплексные числа $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$. Центр является устойчивым по Ляпунову.

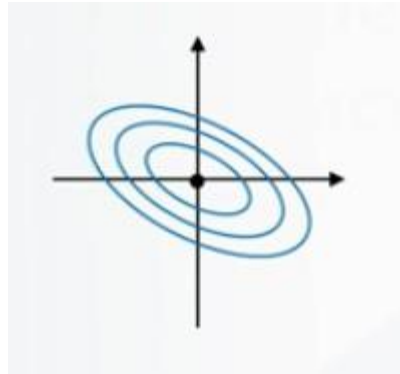


Рис. 21. Фазовый портрет центра.

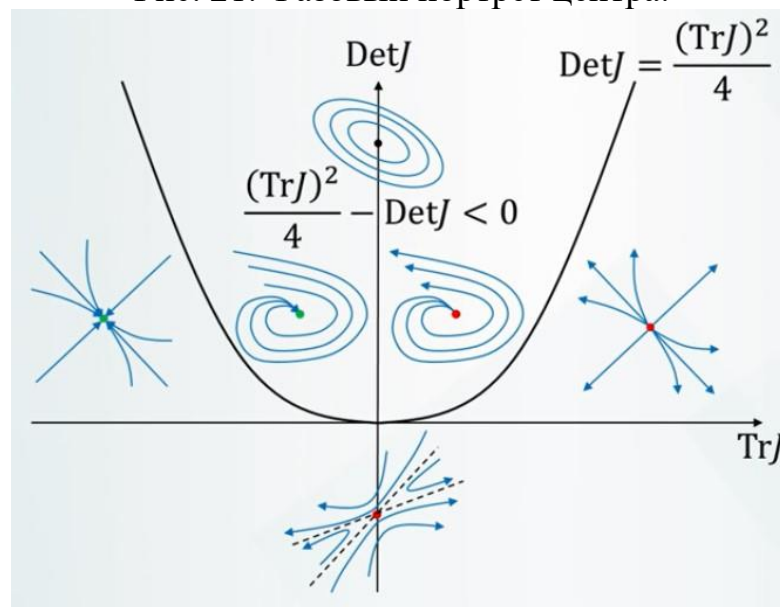


Рис. 22. Стационарные точки на бифуркационной диаграмме.

Метод функции Ляпунова

Данный метод используется для дополнительного исследования негрубых точек. Введем понятие функции Ляпунова.

Функция $V(x, y)$, непрерывно дифференцируемая в некоторой U окрестности начала координат, называется *функцией Ляпунова* автономной системы, если выполнены следующие условия: эта функция является положительной $V(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \in U / \{0\}$; значение функции равно нулю $V(0, 0) = 0$ в начале координат; полная производная по времени $V'_t(x, y) \leq 0$ для всех $(x, y) \in U$. Примеры функций Ляпунова: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $a, b > 0$.

Найдем полную производную от функции $V(x, y)$ по времени t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = \langle \text{grad} V, \dot{X} \rangle,$$

здесь $\text{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$, $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})$. Вектор $\text{grad} V$ всегда направлен в сторону наибольшего возрастания функции V . Вектор скорости \dot{X} в любой точке движения направлен по касательной к фазовой траектории.

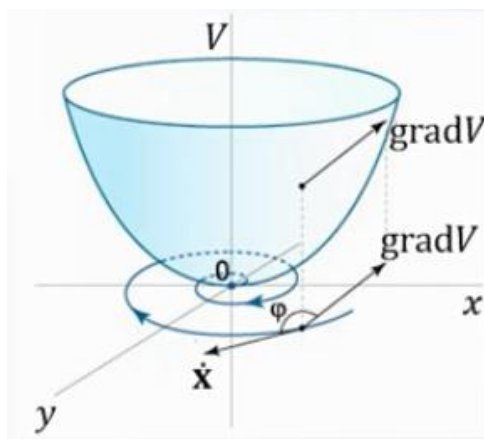


Рис. 23. Графическая интерпретация метода функции Ляпунова.

Если скалярное произведение $\langle \text{grad} V, \dot{X} \rangle < 0$, то угол между градиентом и вектором скорости $\varphi > 90^\circ$. В таком случае траектория движения (фазовая траектория) стремиться к началу координат, то есть система является устойчивой. Соответственно, если $\varphi < 90^\circ$, то появляется фазовая траектория с неустойчивой стационарной точкой.

Теорема об устойчивости по Ляпунову: если в некоторой окрестности нулевой стационарной точки автономной системы существует функция Ляпунова, то нулевая стационарная точка является устойчивой по Ляпунову.

Теорема об асимптотической устойчивости: если в некоторой окрестности нулевой стационарной точки автономной системы существует функция Ляпунова с отрицательно определенной

производной $\langle grad V, \dot{X} \rangle < 0$ для всех $(x, y) \in U / \{0\}$, то нулевая стационарная точка является асимптотически устойчивой.

Недостатком (ограниченностью) метода функции Ляпунова заключается в том, что не существует алгоритма, который позволяет заранее определить функцию Ляпунова для конкретной динамической системы.

Нелинейная динамика взаимодействия предприятий.

Классификация Ю. Одума.

В классификации Ю. Одума можно выделить несколько видов взаимодействия:

1. отношение «хищник-жертва». Предприятие X (жертва) производит сырье для предприятия Y (хищник).
2. конкуренция. Предприятие X и предприятие Y производят одинаковое сырье, что влечет борьбу между ними за покупателя.
3. симбиоз. В рамках симбиоза выделяется два вида взаимодействия – протокооперация (взаимодействие между предприятием X и предприятием Y полезно для обоих, но не обязательно) и мутуализм (предприятие X не может существовать без предприятия Y , и наоборот).

Рассмотрим явный вид динамических систем, соответствующих перечисленным взаимодействиям между предприятиями.

Отношение «хищник-жертва» соответствует системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x - \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = -\varepsilon_y y + \gamma_{yx} xy. \end{cases}$$

Основная особенность – если отсутствует продукция предприятия X (жертва), то количество продукции предприятия Y (хищник) со временем убывает к нулю.

Конкуренция описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x - \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = \varepsilon_y y - \gamma_{yx} xy. \end{cases}$$

Основная особенность – если отсутствует продукция предприятия X , то количество продукции предприятия Y неограниченно возрастает со временем.

Протокооперации соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x + \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = \varepsilon_y y + \gamma_{yx} xy. \end{cases}$$

Основная особенность – если отсутствует продукция предприятия X , то присутствует некоторое возрастание продукции предприятия Y со временем.

Мутуализму соответствует
$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon_x x + \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = -\varepsilon_y y + \gamma_{yx} xy. \end{cases} \quad \text{Основная}$$

особенность – если отсутствует продукция предприятия X , то количество продукции предприятия Y стремиться к нулю, и наоборот.

Мальтузианская (не ограниченная) модель взаимодействия предприятий в отношении «хищник-жертва».

Динамическая система
$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x - \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = -\varepsilon_y y + \gamma_{yx} xy, \end{cases} \quad \text{еще называется}$$

системой Лотки-Вольтерра. В качестве примера рассмотрим производство смартфонов. Тогда в системе x – количество продукта сырьевой отрасли (редкоземельные металлы), y – количество конечного продукта (смартфоны), получаемого из сырья. Проведем качественный анализ заданной динамической системы. Для этого воспользуемся первым приближением исходной системы.

Стационарными точками системы «хищник-жертва» $O(0,0)$ и $E\left(\frac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}, \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}\right)$. Якобианом системы будет $J = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \gamma_{xy} y & -\gamma_{xy} x \\ \gamma_{yx} x & -\varepsilon_y + \gamma_{yx} x \end{pmatrix}$.

Далее определяем якобиан для нулевой точки $O(0,0)$

$$J_O = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y \end{pmatrix}$$

и ненулевой точки $E\left(\frac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}, \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}\right)$

$$J_E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_y \frac{\gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} \\ -\varepsilon_x \frac{\gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь посчитаем собственные значения соответствующих матриц якобианов J_O и J_E . Для точки $O(0,0)$ получаем $\lambda_1 = -\varepsilon_y$, $\lambda_2 = \varepsilon_x$,

поэтому делаем вывод что $O(0,0)$ – седло. Для точки $E\left(\frac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}, \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}\right)$

получаем $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}$, поэтому делаем вывод что E – критический случай (возможно центр). Для точного определения центра необходимо

дополнительно проводить либо вычислительный эксперимент, либо применять метод функции Ляпунова.

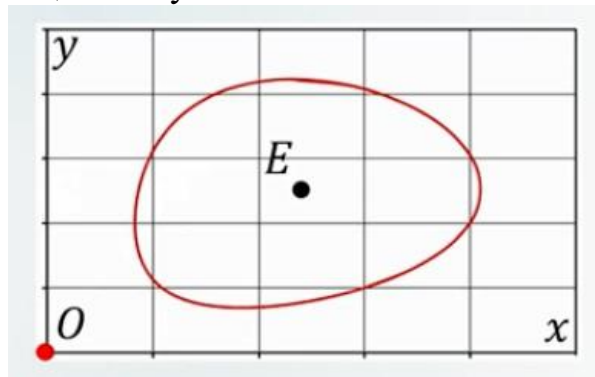


Рис. 24. Фазовый портрет системы в окрестности точки E .

Быстрые и медленные динамические переменные.

Редукция динамических систем означает возможность с помощью определенных преобразований понизить размерность системы. Если редукция в системе возможна, то это подразумевает наличие в системе так называемых быстрых и медленных динамических переменных.

Для формального определения быстрых и медленных переменных, рассмотрим полную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (7)$$

Пусть в системе x – быстрая переменная, y – медленная переменная, обозначим через Δt_x – время достижения равновесного значения переменной x , а через Δt_y – время достижения равновесного значения переменной y .

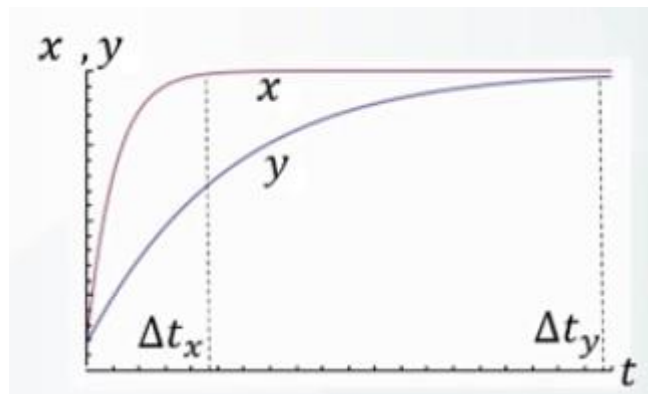


Рис. 25. Зависимость переменных x и y от времени.

По рисунку видно, что быстрая переменная x резко (за короткий промежуток времени) выходит на равновесное значение, а вот медленная переменная y возрастает постепенно (выходит на равновесное значение за долгий промежуток времени).

Таким образом, если $\Delta t_x \ll \Delta t_y$, то $\dot{x} \gg \dot{y}$. Именно это дает возможность сделать в системе редукцию, то есть избавиться от быстрой переменной и оставить только медленную переменную. Так как $\dot{x} \gg \dot{y}$, то функцию в системе справа (которая соответствует быстрой переменной) можно представить в виде

$$f(x, y) = A\varphi(x, y),$$

где $A \gg 1$ – некоторая константа. Тогда сделаем замену $\dot{x} = A\varphi(x, y)$ и введем малый параметр $\varepsilon = A^{-1} \ll 1$. Именно наличие малого параметра в динамической системе любого порядка позволяет произвести редукцию. Перепишем систему (7) в новых обозначениях

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \varphi(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (8)$$

Поскольку $\varepsilon \ll 1$, то можем считать, что $\varphi(x, y) = 0$, то есть

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad \text{– вырожденная динамическая система.}$$

Если редукция системы возможна (не всегда это выполняется), то полная динамическая система на плоскости сводится к вырожденной системе, состоящей из одного дифференциального и одного алгебраического уравнений. Плюс ко всему, число начальных условий вырожденной системы меньше, чем в полной системе.

Теорема А.Н. Тихонова.

Сформулируем математически строгие условия, которые определяют возможность редукции динамической системы. В основе этого лежит теорема Тихонова.

Теорема А.Н. Тихонова. Рассмотрим n -мерную динамическую систему

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx_p}{dt} = f_p(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n), & p = 1, \dots, r, \\ \frac{dx_q}{dt} = f_q(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n), & q = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

Решение полной системы стремится к решению вырожденной системы при $\varepsilon \rightarrow 0$, если выполнены следующие условия:

- решение полной и вырожденной системы единственно, а правые части непрерывны;
- решение $x_1 = \omega_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_r = \omega_r(x_1, \dots, x_n)$ представляет собой изолированный корень алгебраической системы

$f_q(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0, q = r+1, \dots, n$ (то есть в окрестности этого корня других корней нет);

- решение x_1, x_2, \dots, x_r – устойчивая изолированная равновесная точка полной системы при всех значениях x_{r+1}, \dots, x_n ;

- начальные условия $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}$ попадают в область влияния устойчивой равновесной точки полной системы.

Модель конкуренции с ограниченным ростом ресурсов.

Рассмотрим, как осуществляется редукция на конкретном примере, а именно модель конкуренции с ограниченным ростом ресурсов.

Недостатками мальтузианской модели конкуренции

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x - \gamma_{xy} xy, \\ \dot{y} = \varepsilon_y y - \gamma_{yx} xy, \end{cases} \text{ являются: а) рост выпуска продукции ничем не}$$

ограничен, б) не ясно, откуда берутся ресурсы для производства, в) нет убыли произведенного продукта. Чтобы исключить эти три ограничения усовершенствуем мальтузианскую модель. Выведем модель конкуренции предприятий с ограниченным ростом ресурсов, воспользовавшись системой

$$\begin{cases} \dot{x} = a(S)x - \beta x - \gamma xy, \\ \dot{y} = a(S)y - \beta y - \gamma xy, \end{cases}$$

здесь $S = S(t)$ – общий для обоих предприятий, потребляемый ими ресурс, $x = x(t)$ – количество продукции, выпускаемой первым предприятием, $y = y(t)$ – количество продукции, выпускаемой вторым

предприятием, функция $a(S) = \frac{a_0 S}{K + S}$ – коэффициент (параметр)

системы, β, γ, a_0, K – фиксированные константы. Тогда несложно показать, что скорость изменения ресурса представимо в виде

$$\dot{S} = -\alpha \frac{a_0 S}{K + S} (x + y) + \nu.$$

Получается, что $-\alpha \frac{a_0 S}{K + S} (x + y)$ отвечает за убыль ресурса за счет его потребления предприятиями, а постоянная ν отвечает за пополнение ресурса за счет постоянного притока извне. По сути, получаем автономную нелинейную динамическую систему из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{a_0 S}{K+S} x - \beta x - \gamma xy, \\ \dot{y} = \frac{a_0 S}{K+S} y - \beta y - \gamma xy, \\ \dot{S} = -\alpha \frac{a_0 S}{K+S} (x+y) + \nu. \end{cases} \quad (9)$$

Для упрощения системы (9) введем новые переменные: $\tau = \beta t$ – масштабированное время, $x_1 = \frac{\gamma}{\beta} x$, $x_2 = \frac{\gamma}{\beta} y$, $x_3 = \frac{\gamma}{\beta} S$ – новые динамические переменные, $\nu' = \frac{\gamma}{\beta^2} \nu$ – параметр, $f(x_3) = \frac{a_0 x_3}{K+x_3}$, $K_{x_3} = \frac{\gamma}{\beta} K$ – постоянная. Подставляем новые переменные в систему (9)

и получаем новую систему всего с двумя параметрами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = f(x_3)x_1 - x_1 - x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = f(x_3)x_2 - x_2 - x_1 x_2, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -\alpha f(x_3)(x_1 + x_2) + \nu'. \end{cases} \quad (10)$$

Допустим, что процессы выработки сырья и его пополнение происходят значительно быстрее, чем производство конечной продукции. Определившись с быстрыми и медленными переменными, можно ввести малый параметр и редуцировать систему (10)

$$\begin{aligned} \alpha \gg 1, \nu' \gg 1, &\Rightarrow \frac{dx_3}{d\tau} = 0, \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\alpha f(x_3)(x_1 + x_2) + \nu' = 0, \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_3) = \frac{\nu'}{\alpha(x_1 + x_2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получается динамическая система на плоскости

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_1 \left[\frac{\nu_0}{(x_1 + x_2)} - (1 - x_2) \right], \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_2 \left[\frac{\nu_0}{(x_1 + x_2)} - (1 - x_1) \right], \end{cases}$$

где $\nu_0 = \frac{\nu'}{\alpha}$ – параметр.

Показанный алгоритм позволяет понизить размерность (редуцировать) динамической системы.

5. Предельные циклы

Продолжаем моделировать нелинейные процессы системы на плоскости.

Простейшая математическая модель предельного цикла

Рассмотрим простейшую математическую модель, в которой рождается предельный цикл

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \quad (11)$$

Но сначала ответим на вопрос: что в этой системе дает линейное приближение? Возможно, этой информации будет достаточно для исследования системы.

В системе существует единственная нулевая стационарная точка $O(0,0)$. Далее линеаризуем систему на найденной стационарной точке, считаем якобиан системы и вычисляем собственные значения якобиана $\lambda_{1,2} = 0$. В рамках линейного приближения эта информация не дает возможности сделать заключение о поведении исходной системы. Поэтому попробуем решить исходную задачу другим способом. Упростим оригинальную систему, перейдя в ней к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (12)$$

То есть от динамических переменных (x, y) переходим к динамическим переменным (ρ, φ) . Подставляем (12) в (11) и получаем систему вида

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \pm \rho(\rho^2 - 1), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Возьмем систему со знаком минус $\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho(\rho^2 - 1), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$. Тогда,

решив систему, построим фазовые траектории системы (11) (см. рис. 26).

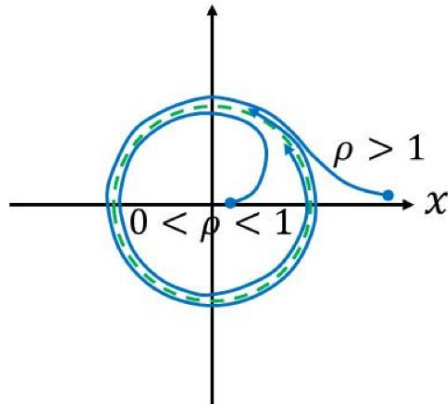


Рис. 26. Фазовые траектории устойчивого предельного цикла.

Возьмем систему со знаком плюс $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\rho^2 - 1), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases}$. Тогда, решив систему, построим фазовые траектории системы (11) (см. рис. 27).

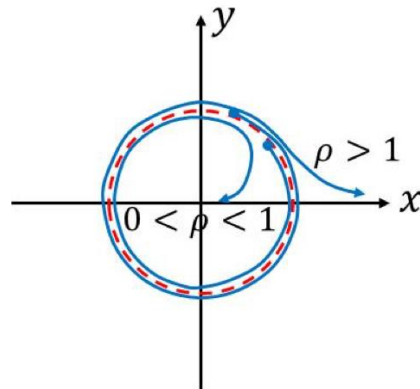


Рис. 27. Фазовые траектории неустойчивого предельного цикла.

Асимптотическая орбитальная устойчивость. Определение предельного цикла

Сформулируем строгое математическое определение предельного цикла. Для этого разберем, что представляет собой асимптотическая орбитальная устойчивость. Орбитальная устойчивость характеризует поведение замкнутой фазовой траектории под действием малых внешних возмущений. На примере системы Лотки-Вольтерра (хищник-жертва) с логистической поправкой

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_x x - \gamma_{xy} xy - \alpha_x x^2, \\ \dot{y} = -\varepsilon_y y + \gamma_{yx} xy - \alpha_y y^2, \end{cases}$$

разберем, что это значит. Построим фазовый портрет и интегральные кривые этой системы (см. рис. 28).

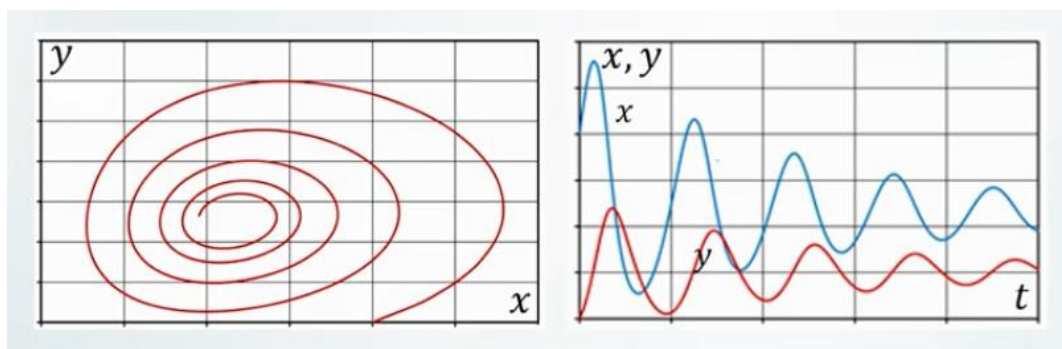


Рис. 28. Фазовый портрет и интегральные кривые системы Лотки-Вольтерра с логистической поправкой.

Фазовая траектория соответствует неустойчивому фокусу, интегральные кривые – это затухающие колебания. Таким образом при небольших изменениях системы фазовый портрет центр системы «хищник-жертва» преобразуется в неустойчивый фокус. Центр (негрубая точка) легко разрушается при малых изменениях правой части системы.

Центр – периодическое движение, характеристики которого зависят от начальных условий.

Предельный цикл – периодическое движение, характеристики которого не зависят от начальных условий.

Пусть $\varphi(t)$ – периодическое решение (замкнутая траектория) автономной системы. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что траектория всякого решения $x(t)$, начинающаяся в δ -окрестности траектории $\varphi(t)$, остается в ε -окрестности траектории $\varphi(t)$ при всех $t \geq 0$, то траектория $\varphi(t)$ называется *орбитально устойчивой*.

Траектория $\varphi(t)$ является *асимптотически орбитально устойчивой*, если $\varphi(t)$ орбитально устойчива и удовлетворяет соотношению $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \varphi\| = 0$ при $\|x_0 - \varphi_0\| < \delta$.

Предельный цикл C называется *устойчивым*, если существует такая область на фазовой плоскости (ε -окрестность), содержащая C , что все фазовые траектории, начинающиеся в ε -окрестности, асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к предельному циклу.

Если в сколь угодно малой ε -окрестности предельного цикла C существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$, то такой цикл называется *неустойчивым*.

Критерии Бендиксона и Дюлака отсутствия предельных циклов

Начнем с критерия Бендиксона. Рассмотрим динамическую

систему вида
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$
 – автономная система первого порядка на

плоскости. Если в некоторой односвязной области (например, правильные многоугольники в R^2) выражение $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ не меняет знак и не равно нулю тождественно, то в этой области не существует предельный цикл.

Пример. Существуют ли замкнутые фазовые траектории у динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \alpha y + x^2 \end{cases} ?$$

Будем использовать критерий Бендиксона. Находим значение выражения $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha$. Если $\alpha \neq 0$, то не существует предельных циклов.

Критерий Дюлака является обобщением критерия Бендиксона. Пусть $b(x, y)$ – некоторая однозначная и дифференцируемая функция, и пусть

$$\frac{\partial}{\partial x} [b(x, y) f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [b(x, y) g(x, y)]$$

не меняет знака и не равно нулю тождественно в области G , ограниченной произвольными дугами (не траекториями и не дугами $b(x, y) = 0$). Тогда:

- если G – односвязная область, то в G не существует предельных циклов;

- если G – двусвязная кольцевая область, то в G не может быть более одного предельного цикла.

Пример. Существуют ли замкнутые фазовые траектории у динамической системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax + by + \alpha x^2 + \beta y^2 \end{cases} ?$$

Пусть $b(x, y) = \exp(-\beta x)$. Находим значение выражения
$$\frac{\partial}{\partial x} [b(x, y) f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [b(x, y) g(x, y)] = b \exp(-2\beta x).$$
 Возможны два случая. 1) Выражение не меняет знака в плоскости (x, y) и не обращается тождественно в ноль, если $b \neq 0$. Следовательно, при любых значениях параметров (за исключением $b \neq 0$) не существует замкнутых фазовых траекторий. 2) Если $b = 0$, то на плоскости (x, y) существует

область, целиком заполненная замкнутыми фазовыми траекториями. Проведя дополнительные исследования можно убедиться, что это замкнутые фазовые траектории типа центр.

Модель Холлинга-Тэннера

Данная модель пришла из популяционной динамики. Адаптируем ее для экономической ситуации

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{A+x}, \\ \dot{y} = sy \left(1 - h \frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Здесь $x = x(t)$ – количество сырья, $y = y(t)$ – количество продукта, получаемого из этого сырья, $rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ – скорость добычи ограниченного сырья, $\frac{mxy}{A+x}$ – убыль сырья на производство продукта, с учетом его насыщения, sy – мальтузианская (не ограниченная) скорость производства продукта, $sh \frac{y^2}{x}$ – убыль продукта за счет внутренней конкуренции при недостатке сырья, s – темп производства продукта, A – параметр, пропорциональный времени, необходимому производителю продукта для получения сырья, m – темп потребления сырья на производство продукта.

Теорема. Система Холлинга-Тэннера имеет устойчивый предельный цикл, если $s < \frac{r}{K} \frac{K - A - 2}{A + 1}$.

Поскольку система нелинейная, проведем вычислительный эксперимент и построим фазовый портрет и интегральные кривые системы (см. рис. 29).

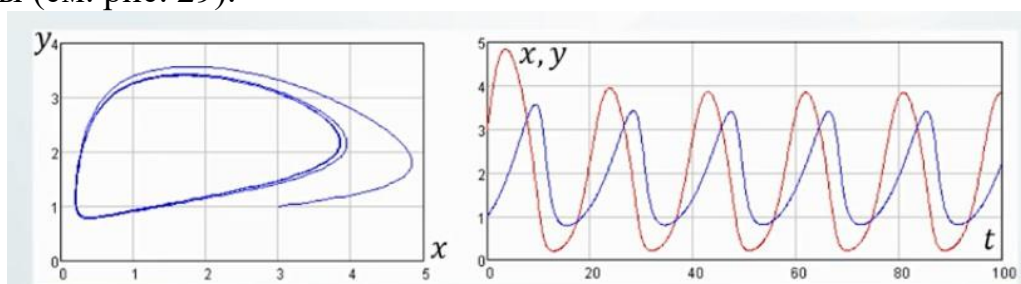


Рис. 29. Фазовый портрет и интегральные кривые системы Холлинга-Тэннера.

Из рисунка видно, что фазовая траектория, стартуя из начального состояния $(x_0, y_0) = (3, 1)$, с течением времени наматывается на

предельный цикл (устойчивый). Особенность в том, что какие бы начальные условия не взяли, фазовая траектория будет вести себя аналогичным образом. А интегральные кривые носят колебательный характер.

Разнообразие режимов функционирования автономных систем
первого порядка на прямой и на плоскости

Данное разнообразие можно упорядочить в виде таблицы.

Устойчивость	Система на прямой	Система на плоскости
Асимптотическая	аттрактор\репеллер	узел, фокус\узел, фокус, седло
По Ляпунову		центр
Асимптотическая орбитальная		предельный цикл\ предельный цикл

6. Бифуркации в двумерных динамических системах

В данном пункте будем рассматривать только локальные бифуркации двумерных динамических систем. Посмотрим каким образом, при незначительном изменении бифуркационного параметра, будет качественно изменяться фазовый портрет двумерной динамической системы.

Седло-узловая бифуркация

Рассмотрим особенность этой бифуркации в рамках двумерных динамических систем. Задана простейшая динамическая система с бифуркационным параметром α

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (13)$$

Проведем анализ системы в первом приближении (линейном приближении). Первым шагом является определение стационарных точек, то есть приравниваем к нулю правые части системы. Возможны следующие случаи:

- стационарные точки не существуют, если $\alpha < 0$;
- существует стационарная точка $O(0,0)$, если $\alpha = 0$;
- существуют стационарные точки $E_1(\sqrt{\alpha}, 0)$, $E_2(-\sqrt{\alpha}, 0)$, если $\alpha > 0$.

Посмотрим теперь, как эти стационарные точки себя ведут с точки зрения устойчивости. Для этого составим якобиан системы

$$J = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и найдем собственные значения матриц коэффициентов, соответствующих найденным стационарным точкам.

Для $\alpha = 0$: точка $O(0,0)$ – седло-узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$); для

$\alpha > 0$: точка $E_2(-\sqrt{\alpha}, 0)$ – седло ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha}$), а точка

$E_1(\sqrt{\alpha}, 0)$ – устойчивый узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2\sqrt{\alpha}$).

Фазовыми портретами будут следующие изображения (см. рис. 30). Красным цветом на рисунке обозначена неустойчивая седловая точка $E_2(-\sqrt{\alpha}, 0)$ (репеллер), а зеленым – устойчивая узловая точка $E_1(\sqrt{\alpha}, 0)$ (аттрактор).

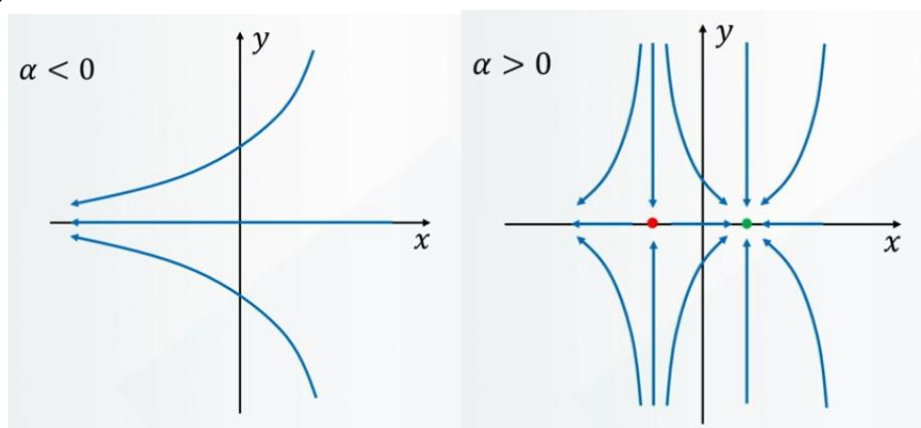


Рис. 30. Фазовые портреты динамической системы (13).

Как видно, при прохождении бифуркационного параметра α через нулевое значение, качественная картина фазового портрета кардинально меняется. Значит, $\alpha = 0$ – бифуркационное значение параметра (точка бифуркации).

Транскритическая бифуркация

Пусть задана простейшая динамическая система с бифуркационным параметром α

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (14)$$

Проведем анализ системы в первом приближении. Стационарными точками будут

- $O(0,0)$ и $E(-\alpha, 0)$, если $\alpha < 0$;
- $O(0,0)$, если $\alpha = 0$;

- $O(0,0)$ и $E(\alpha,0)$, если $\alpha > 0$.

Посмотрим теперь на устойчивость найденных точек. Якобиан системы имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для $\alpha < 0$: точка $O(0,0)$ – устойчивый узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\alpha$), а точка $E(-\alpha,0)$ – седло ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3\alpha$); для $\alpha = 0$: точка $O(0,0)$ – седло-узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$); для $\alpha > 0$: точка $O(0,0)$ – седло ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \alpha$), а точка $E(\alpha,0)$ – устойчивый узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3\alpha$). Фазовыми портретами будут следующие изображения (см. рис. 31).

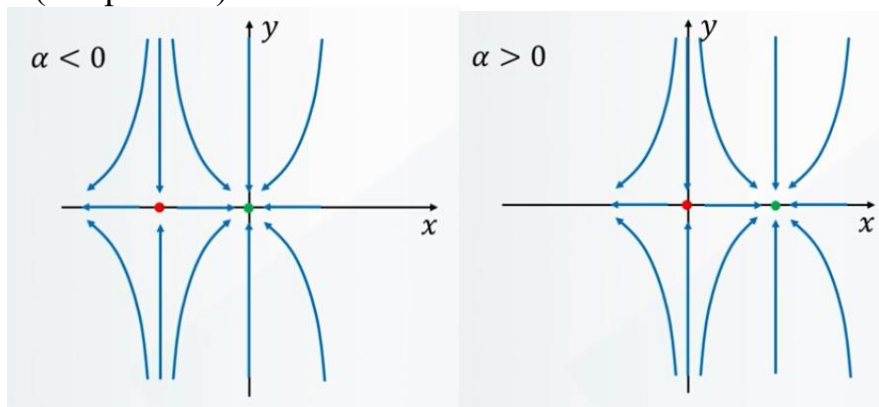


Рис. 31. Фазовые портреты динамической системы (14).

Как видно из рисунка, при прохождении бифуркационного параметра α через нулевое значение, произошел обмен устойчивостью между стационарными точками. Нулевая равновесная точка была асимптотически устойчивой, а при переходе через нулевое значение бифуркационного параметра, стала неустойчивой. Значит, $\alpha = 0$ – бифуркационное значение параметра (точка бифуркации).

Вилообразная бифуркация. Сверхкритический случай

Задана динамическая система с бифуркационным параметром α

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогично, используем линеаризованную систему для анализа в первом приближении. Стационарные точки системы (15):

- $O(0,0)$, если $\alpha < 0$;
- $O(0,0)$, если $\alpha = 0$;
- $O(0,0)$, $E_1(\sqrt{\alpha}, 0)$ и $E_2(-\sqrt{\alpha}, 0)$, если $\alpha > 0$.

Исследовать устойчивость стационарных точек начинаем с якобиана

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для $\alpha < 0$: точка $O(0,0)$ – устойчивый узел ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\alpha$); для $\alpha = 0$: точка $O(0,0)$ – полуустойчивая точка ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$); для $\alpha > 0$: точка $O(0,0)$ – седло ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \alpha$), а точки $E_1(\sqrt{\alpha}, 0)$ и $E_2(-\sqrt{\alpha}, 0)$ – устойчивые узлы ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3\alpha$). Фазовыми портретами будут следующие изображения (см. рис. 32).

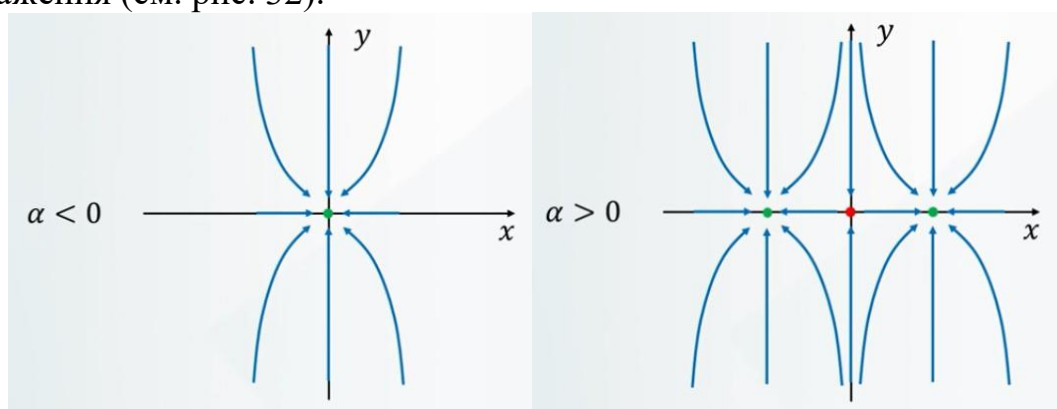


Рис. 32. Фазовые портреты динамической системы (15).

При прохождении бифуркационного параметра α через нулевое значение, единственная асимптотически устойчивая стационарная точка теряет устойчивость (становится неустойчивой), в результате чего, рождается пара асимптотически устойчивых узлов. Значение $\alpha = 0$ – бифуркационное значение параметра (точка бифуркации).

Рождение предельного цикла. Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа

Рассмотрим тот вид бифуркации, который приводит к зарождению предельного цикла. Будет исследовать сверхкритический случай, то есть мягкое возбуждение автоколебаний. Задана динамическая система с бифуркационным параметром α вида

$$\begin{cases} \dot{x} = x[\alpha - (x^2 + y^2)] - y, \\ \dot{y} = y[\alpha - (x^2 + y^2)] + x. \end{cases} \quad (16)$$

Анализ в первом приближении дает такие результаты. Стационарной точкой является $O(0,0)$ при любых $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим теперь якобиан системы

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - 3x^2 - y^2 & -2xy - 1 \\ -2xy + 1 & \alpha - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Устойчивость стационарной точки $O(0,0)$ зависит от значения бифуркационного параметра. Для $\alpha < 0$: точка $O(0,0)$ – асимптотически устойчивый фокус ($\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i$); для $\alpha = 0$: точка $O(0,0)$ – критический случай ($\lambda_{1,2} = \pm i$); для $\alpha > 0$: точка $O(0,0)$ – неустойчивый фокус $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Для того чтобы построить фазовые портреты, необходимо перейти в полярную систему координат

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho[\alpha - \rho^2], \\ \dot{\phi} = 1, \end{cases} \quad (16')$$

решить эту систему аналитически и вернуться в декартовы координаты.

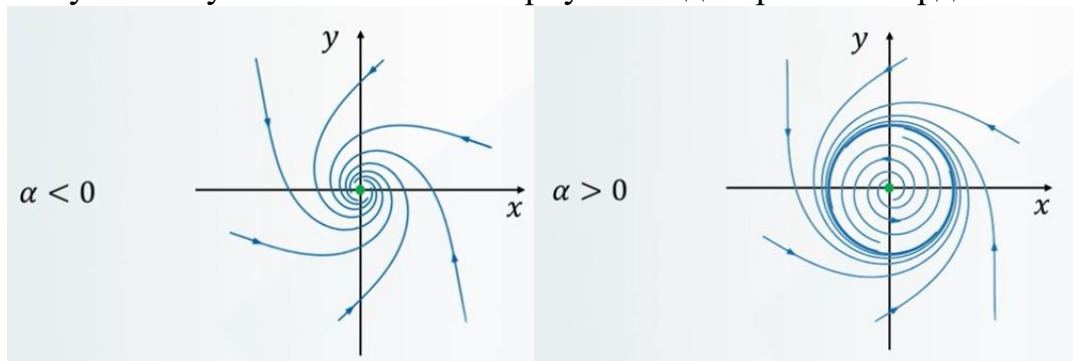


Рис. 33. Фазовые портреты динамической системы (16).

При переходе через бифуркационное значение параметра $\alpha = 0$ фазовый портрет претерпевает кардинальные изменения. Не смотря на то, что анализ по первому приближению давал неустойчивый фокус, фазовый портрет показывает наличие предельного цикла. Именно такое поведение фазовых траекторий при изменении бифуркационного параметра указывает на наличие бифуркации рождения предельного цикла (бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа).

Парадокс обогащения и бифуркация Хопфа

Рассмотрим реальный пример динамической системы, где наблюдается бифуркация рождения предельного цикла. В таких системах присутствует так называемый парадокс обогащения. Впервые этот парадокс был обнаружен экологом Майклом Розенцвейгом.

Парадокс Майкла Розенцвейга, в переносе на экономику, заключается в следующем. Увеличение максимального количества ресурса K может привести к исчезновению конечного продукта.

Посмотрим теперь, как этот парадокс связан с бифуркацией рождения предельного цикла. Розенцвейг предложил такую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{xy}{1+x}, \\ \dot{y} = -y \left(\gamma - \delta \frac{x}{1+x} \right). \end{cases} \quad (17)$$

Здесь (x, y) – динамические переменные, x – количество ресурса, y – количество продукта, слагаемое $x \left(1 - \frac{x}{K} \right)$ описывает производство ресурса с учетом ограничения, K – максимальное количество ресурса, слагаемое $\frac{xy}{1+x}$ описывает убыль ресурса с учетом насыщения конечным продуктом, $-y\gamma$ – скорость убыли конечного продукта без ограничений, $\delta \frac{xy}{1+x}$ – скорость увеличения конечного продукта.

Не будем проводить анализ в первом приближении, а остановимся на особенностях этой системы. Для этого обратимся к вычислительному эксперименту при различных значениях параметров γ, δ, K . И посмотрим на изменения фазовых портретов системы (17).

Оказывается, что при значении $K = \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$ происходит рождение устойчивого предельного цикла. Таким образом, $K = \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$ является точкой бифуркации. Посмотрим на фазовые портреты системы (17) при различных значениях K .

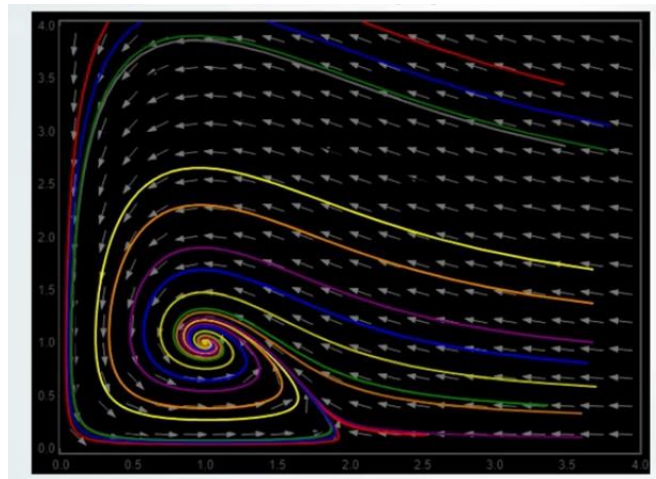


Рис. 34. Фазовый портрет динамической системы (17) при $K < \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$.

На рисунке стрелочками показано векторное поле системы, которое показывает направление движения фазовых траекторий. Видно, что этот фазовый портрет описывает асимптотически устойчивый фокус.

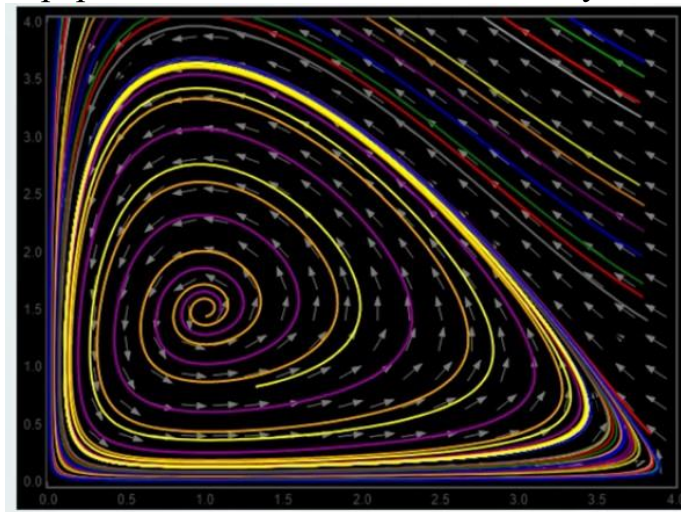


Рис. 35. Фазовый портрет динамической системы (17) при $K > \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$.

На рисунке 35 показано наличие в системе устойчивого предельного цикла, на который наматываются все остальные фазовые траектории. А это говорит о том, что в системе реализуется бифуркация Пуанкаре-Андрона-Хопфа.

Вернемся к парадоксу. Если значение $K < \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$, то исчезновения конечного продукта не будет, т.к. все траектории стремятся к ненулевой устойчивой стационарной точке. Если значение $K > \frac{\delta - 3\gamma}{\delta - \gamma}$, то может оказаться, что контур предельного цикла будет касаться нулевых значений x или y . А это как раз и дает нулевое значение конечного продукта.

Вопросы для самоконтроля

Вопрос 1. В нестрогой интерпретации, для определения динамической системы достаточно задать

1. состояние системы,
2. состояние системы и закон ее эволюции,
3. закон эволюции системы?

Вопрос 2. Точка движется вдоль криволинейной траектории на поверхности сферы. Чему равно наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния данной системы?

1. 1,
2. 2,
3. 3.

Вопрос 3. Точка движется из точки А в точку В на поверхности сферы. Длина траектории равна кратчайшему расстоянию между А и В ($A \neq B$). Чему равно наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния данной системы?

1. 1,
2. 2,
3. 3.

Вопрос 4. Одномерным фазовым пространством в декартовой системе координат является

1. Ox ,
2. $xO\dot{x}$,
3. xOt .

Вопрос 5. Двухмерным фазовым пространством в декартовой системе координат является

1. xOy ,
2. $O\dot{x}$,
3. xut .

Вопрос 6. Множество всех изображающих точек для момента времени t_0 называется

1. фазовой переменной динамической системы,
2. фазовой траекторией динамической системы,
3. решением (интегральной траекторией) динамической системы?

Вопрос 7. Пересекаются ли фазовые траектории?

1. пересекаются,
2. не пересекаются,

3. пересекаются в некоторых случаях.

Вопрос 8. Множество фазовых траекторий при различных начальных положениях динамической системы называется

1. семейством решений (интегральных траекторий) системы,
2. семейством фазовых переменных системы,
3. фазовым портретом системы?

Вопрос 9. Если решение динамической системы асимптотически устойчиво, то оно

1. устойчиво по Ляпунову,
2. неустойчиво по Ляпунову,
3. экспоненциально устойчиво?

Вопрос 10. Если решение динамической системы экспоненциально устойчиво, то оно

1. асимптотически устойчиво,
2. устойчиво по Ляпунову,
3. неустойчиво по Ляпунову?

Вопрос 11. Континуальная автономная динамическая система первого порядка на прямой – это система вида

1. $\dot{x} = f(x)$,
2. $\dot{x} = f(x, y)$,
3. $\dot{x} = f(x, t)$.

Вопрос 12. Стационарные точки динамической системы $\dot{x} = f(x)$ являются корнями уравнения

1. $f(x) = C, C \neq 0$,
2. $f(x) = 0$,
3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Вопрос 13. Теорема Ляпунова об устойчивости в первом приближении

1. позволяет упростить анализ динамической системы с сохранением устойчивости (неустойчивости) стационарных точек,
2. позволяет упростить анализ динамической системы с изменением устойчивости (неустойчивости) стационарных точек,
3. усложняет анализ динамической системы с сохранением устойчивости (неустойчивости) стационарных точек.

Вопрос 14. В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости в первом приближении

1. аттрактор линейной аппроксимации является репеллером оригинальной нелинейной динамической системы,

2. аттрактор (репеллер) линейной аппроксимации является аттрактором (репеллером) оригинальной нелинейной динамической системы,

3. репеллер линейной аппроксимации является аттрактором оригинальной нелинейной динамической системы.

Вопрос 15. Основными выводами по реализациям некоторой динамической модели производства продукции являются: 1) неограниченное потребление ресурсов приводит к неограниченному производству продукции; 2) неограниченное производство продукции приводит к истощению ресурсов. О какой модели идет речь?

1. модель Мальтуса,
2. модель Ферхюльста,
3. модель Холлинга-Теннера.

Вопрос 16. Основными выводами по реализациям некоторой динамической модели производства продукции являются: 1) ограниченное потребление ресурсов приводит к ограниченному производству продукции; 2) ограниченное производство продукции не приводит к истощению ресурсов. О какой модели идет речь?

1. модель Мальтуса,
2. модель Ферхюльста,
3. модель Холлинга-Теннера.

Вопрос 17. В нестрогой интерпретации, бифуркация системы это явление

1. качественной перестройки фазового пространства динамической системы при малых изменениях ее параметров,
2. незначительных количественных изменений фазового пространства динамической системы при малых изменениях ее параметров,
3. сохранения неизменности фазового пространства динамической системы при любых изменениях ее параметров.

Вопрос 18. Бифуркационными значениями параметров называются

1. параметры динамической системы, которые ответственны за бифуркацию,
2. значение фазовой переменной динамической системы, при которых происходит бифуркация,
3. значения параметров динамической системы, при которых происходит бифуркация.

Вопрос 19. Что показывает бифуркационная диаграмма?

1. смену всех возможных динамических режимов системы при фиксированном значении бифуркационного параметра,
2. смену всех возможных динамических режимов системы при изменении значения бифуркационного параметра,
3. один из динамических режимов системы при фиксированном значении бифуркационного параметра.

Вопрос 20. Нормальной формой седло-узловой бифуркации динамической системы с бифуркационным параметром α является

1. $\dot{x} = \alpha - x^2$,
2. $\dot{x} = \alpha x - x^2$,
3. $\dot{x} = \alpha x - x^3$.

Вопрос 21. Нормальной формой транскритической бифуркации динамической системы с бифуркационным параметром α является

1. $\dot{x} = \alpha - x^2$,
2. $\dot{x} = \alpha x - x^2$,
3. $\dot{x} = \alpha x - x^3$.

Вопрос 22. Нормальной формой виллообразной бифуркации динамической системы с бифуркационным параметром α является

1. $\dot{x} = \alpha - x^2$,
2. $\dot{x} = \alpha x - x^2$,
3. $\dot{x} = \alpha x - x^3$.

Вопрос 23. Состояние типа центр определяет

1. периодическое движение, характеристики которого не зависят от начальных условий и параметров динамической системы
2. периодическое движение, характеристики которого не зависят от начальных условий
3. периодическое движение, характеристики которого зависят от начальных условий

Вопрос 24. Состояние типа предельный цикл определяет

1. периодическое движение, характеристики которого зависят от начальных условий и параметров динамической системы,
2. периодическое движение, характеристики которого не зависят от начальных условий,
3. периодическое движение, характеристики которого зависят от начальных условий.

Вопрос 25. Устойчивый предельный цикл является

1. асимптотически устойчивым состоянием динамической системы,
2. экспоненциально устойчивым состоянием динамической системы,
3. асимптотически орбитально устойчивым состоянием динамической системы.

Вопрос 26. В экономической интерпретации классификации Ю. Одума, если предприятие X производит только сырье для предприятия Y , то предприятия находятся в

1. отношении «хищник-жертва»,
2. отношении протокооперации,
3. отношении матуализма.

Вопрос 27. В экономической интерпретации классификации Ю. Одума, если взаимодействие между предприятиями X и Y полезно для обоих, но не является обязательным, то предприятия находятся в

1. отношении «хищник-жертва»,
2. отношении протокооперации,
3. отношении мутуализма.

Вопрос 28. В экономической интерпретации классификации Ю. Одума, если предприятие X не может существовать без предприятия Y , и наоборот, то предприятия находятся в

1. отношении «хищник-жертва»,
2. отношении протокооперации,
3. отношении мутуализма.

Задания для самостоятельного решения

1. Проверить условия бифуркации рождения цикла систем, в которых бифуркационным параметром является параметр α :

a)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(1 - x_1 x_2^2 + A(x_1 - 1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2 - x_2. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r x_1 (\alpha + x_1) (1 - x_1) - c x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha d x_2 + (c - d) x_1 x_2. \end{cases}$$

c)
$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y + y(1 - y) = 0,$$

d)
$$\ddot{y} - \alpha \dot{y} + y + \frac{4}{3} \dot{y}^3 = 0.$$

2. Построить бифуркационные диаграммы для 1.a)-d).

3. Построить фазовые портреты 1.a)-d).

4. Определить тип бифуркации нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha_2 - 2\alpha_1)x_1 - \alpha_1 x_2 - x_1(x_1^2 - 2x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 - 2\alpha_1)x_2 - x_2(2x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Здесь $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Бифуркационным параметром является параметр α_1 . Построить фазовый портрет.

5. Провести бифуркационный анализ следующих систем:

a)
$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - x^3, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - x^2, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha - x^2, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \dot{x} = x[\alpha + (x^2 + y^2)] + y, \\ \dot{y} = y[\alpha + (x^2 + y^2)] - x. \end{cases}$$

6. Провести анализ системы в первом приближении

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{xy}{1+x}, \\ \dot{y} = -y \left(\gamma - \delta \frac{x}{1+x} \right). \end{cases}$$

Список литературы

1. Дмитриев А.В. Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем. – М.-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2016.
2. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
4. Вовк И.В., Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Дюжина лекций о фракталах: от объекта восхищения к инструменту познания. – М.: ЛЕНАНД, 2018.
5. Олемской А.И. Синергетика сложных систем: феноменология и статистическая теория. – М.: КРАСАНД, 2009.
6. Онлайн-курс «Моделирование процессов и систем. Нелинейные динамические системы» на образовательной платформе «Открытое образование» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://openedu.ru/course/hse/MODSYS>. – Загл. с экрана.
7. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
8. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Современные направления математики. Фундаментальные направления, т.5 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). – М.: Мир, 1985, С.5-218.
9. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
10. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002. – 560 с
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
12. Kuznetsov Y.A. Elements of applied bifurcation theory – New York. Springer-Verlag, 1998
13. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едоториал УРСС, 2004. . – 318с.
14. Семенова Е.Е. Математические модели нелинейной динамики (Введение в синергетику) [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://math-it.petrso.ru/users/seменова/Nonlinear_Dynamics/

**Методические рекомендации и задания к занятиям по
дисциплине «Элементы теории бифуркаций. Часть 1. Динамические
системы»: учебно-методическое пособие**

Автор-составитель: Хазова Юлия Александровна

Редактор

Подписано в печать . . . 2019. Формат 60×80/16.
Тираж: 100 экз.

Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности
КФУ им. В. И. Вернадского
295007, Симферополь, пр-т Академика Вернадского, 4,
КФУ им. В. И. Вернадского